# 2021 年数学一试题

## 一、选择题（本题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分.）

（1）函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处

（A）连续且取极大值　　（B）连续且取极小值

（C）可导且导数为0　　（D）可导且导数不为0

（2）设函数 $f(x,y)$ 可微，且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2, f(x,x^2)=2x^2\ln x$，则 $df(1,1)=$

（A）$dx+dy$　　（B）$dx-dy$　　（C）$dy$　　（D）$-dy$

（3）设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的3次泰勒多项式为 $ax+bx^2+cx^3$，则

（A）$a=1,b=0,c=-\dfrac{7}{6}$　　（B）$a=1,b=0,c=\dfrac{7}{6}$

（C）$a=-1,b=-1,c=-\dfrac{7}{6}$　　（D）$a=-1,b=-1,c=\dfrac{7}{6}$

（4）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，则 $\int_0^1 f(x)dx=$

（A）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{2n}$　　（B）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$

（C）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\dfrac{k-1}{2k}\right)\dfrac{1}{n}$　　（D）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\dfrac{k}{2n}\right)\dfrac{2}{n}$

（5）二次型 $f(x_1,x_2x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为

（A）2，0　　（B）1，1　　（C）2，1　　（D）1，2

（6）已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}$，记 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-k\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-l_1\boldsymbol{\beta}_1-l_2\boldsymbol{\beta}_2$，若 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 两两正交，则 $l_1,l_2$ 依次为

（A）$\dfrac{5}{2},\dfrac{1}{2}$　　（B）$-\dfrac{5}{2},\dfrac{1}{2}$　　（C）$\dfrac{5}{2},-\dfrac{1}{2}$　　（D）$-\dfrac{5}{2},-\dfrac{1}{2}$

（7）设 $A,B$ 为 $n$ 阶实矩阵，下列不成立的是

（A）$r\begin{pmatrix} A & O \\ O & A^T A \end{pmatrix}=2r(A)$　　（B）$r\begin{pmatrix} A & AB \\ O & A^T \end{pmatrix}=2r(A)$

（C）$r\begin{pmatrix} A & BA \\ O & AA^T \end{pmatrix}=2r(A)$　　（D）$r\begin{pmatrix} A & O \\ BA & A^T \end{pmatrix}=2r(A)$

（8）设$A,B$为随机事件，且$0<P(B)<1$，下列命题中为假命题的是

（A）若$P(A|B)=P(A)$，则$P\left(A\middle|\overline{B}\right)=P(A)$

（B）若$P(A|B)>P(A)$，则$P\left(\overline{A}\middle|\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}\right)$

（C）若$P(A|B)>P\left(A\middle|\overline{B}\right)$，则$P(A|B)>P(A)$

（D）若$P(A|A\cup B)>P\left(\overline{A}|A\cup B\right)$，则$P(A)>P(B)$

（9）设$(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots,(X_n,Y_n)$为来自总体$N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$的简单随机样本，令

$\theta=\mu_1-\mu_2,\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i,\hat{\theta}=\overline{X}-\overline{Y}$，则

（A）$\hat{\theta}$是$\theta$的无偏估计，$D\left(\hat{\theta}\right)=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$

（B）$\hat{\theta}$不是$\theta$的无偏估计，$D\left(\hat{\theta}\right)=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$

（C）$\hat{\theta}$是$\theta$的无偏估计，$D\left(\hat{\theta}\right)=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

（D）$\hat{\theta}$不是$\theta$的无偏估计，$D\left(\hat{\theta}\right)=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

（10）设$x_1,x_2,\cdots,x_{16}$是来自总体$N(\mu,4)$的简单随机样本，考虑假设检验问题：

$H_0:\mu\leqslant 10,H_1:\mu>10$，$\Phi(x)$表示标准正态分布函数，若该检验问题的拒绝域为

$W=\left\{\overline{X}\geqslant 11\right\}$，其中$\overline{X}=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}X_i$，则$\mu=11.5$时，该检验犯第二类错误的概率为

（A）$1-\Phi(0.5)$　　（B）$1-\Phi(1)$　　（C）$1-\Phi(1.5)$　　（D）$1-\Phi(2)$

## 二、填空题（本题共 6 小题，每小题共 5 份，共 30 分.）

（11） $\int_0^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2+2x+2} =$ ________.

（12）设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=2e^t+t+1, \\ y=4(t-1)e^t+t^2, \end{cases}$ 确定，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0} =$ ________.

（13）欧拉方程 $x^2y''+xy'-4y=0$ 满足条件 $y(1)=1, y'(1)=2$ 的解为 $y=$ ________.

（14）设 $\Sigma$ 为空间区域 $\{(x,y,z)\,|\,x^2+4y^2\leqslant 4, 0\leqslant z\leqslant 2\}$ 表面的外侧，则曲面积分

$\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz+y^2dzdx+zdxdy=$ ________.

（15）设 $A=(a_{ij})$ 为3阶矩阵，$A_{ij}$ 为 $a_{ij}$ 的代数余子式，若 $A$ 的每行元素之和均为2，

且 $|A|=3$，则 $A_{11}+A_{21}+A_{31}=$ ________.

（16）甲、乙两个盒子中各装有2个红球和2个白球，先从甲盒中任取一球，观察颜色后放入乙盒中，再从乙盒中任取一球.令 $X,Y$ 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红色球个数，则 $X$ 与 $Y$ 的相关系数为________.

## 三、解答题（本题共 6 小题，共 70 分.）

（17）（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

（18）（本题满分 12 分）

设$u_n(x)=e^{-nx}+\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}(n=1,2,\cdots)$，求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的收敛域及和函数.

（19）（本题满分 12 分）

已知曲线$C:\begin{cases}x^2+2y^2-z=6\\4x+2y+z=30\end{cases}$，求$C$上的点到$xOy$坐标面距离的最大值.

（20）（本题满分 12 分）

设$D\subset R^2$是有界单连通闭区域，$I(D)=\iint\limits_D(4-x^2-y^2)dxdy$取得最大值的积分区域记为$D_1$.

（Ⅰ）求$I(D_1)$的值；

（Ⅱ）计算

$$\int_{\partial D_1}\frac{\left(xe^{x^2+4y^2}+y\right)dx+\left(4ye^{x^2+4y^2}-x\right)dy}{x^2+4y^2}$$

其中$\partial D_1$是$D_1$的正向边界.

（21）（本题满分 12 分）

已知$A=\begin{bmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{bmatrix}$.

（Ⅰ）求正交矩阵$P$，使得$P^TAP$为对角矩阵；

（Ⅱ）求正定矩阵$C$，使得$C^2=(a+3)E-A$，其中$E$为3阶单位矩阵.

（22）（本题满分 12 分）

在区间$(0,2)$上随机取一点，将该区间分成两段，较短一段的长度记为$X$，较长一段的长度记为$Y$.令$Z=\dfrac{Y}{X}$.

（Ⅰ）求$X$的概率密度；

（Ⅱ）求$Z$的概率密度；

（Ⅲ）求$E\left(\dfrac{X}{Y}\right)$.