2021 年数学一试题解析

一、选择题（本题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分.）

（1）函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处

（A）连续且取极大值　　（B）连续且取极小值

（C）可导且导数为0　　（D）可导且导数不为0

【答案】选（D）.

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1=f(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，所以 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

（2）设函数 $f(x,y)$ 可微，且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2, f(x,x^2)=2x^2\ln x$，则 $df(1,1)=$

（A）$dx+dy$　　（B）$dx-dy$　　（C）dy　　（D）$-dy$

【答案】选（C）.

【解析】$\mathrm{d}f(1,1)=f'_x(1,1)\mathrm{d}x+f'_y(1,1)\mathrm{d}y$，

$f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$ 对 x 求导可得

$$f'_x(x+1,e^x)+e^x f'_y(x+1,e^x)=(x+1)^2+2x(x+1),$$

将 $x=0$ 带入可得 $f'_x(1,1)+f'_y(1,1)=1$　　①

在 $f(x,x^2)=2x^2\ln x$ 两边对 x 求导可得

$$f'_x(x,x^2)+2xf'_y(x,x^2)=4x\ln x+2x$$

将 $x=1$ 带入可得 $f'_x(1,1)+2f'_y(1,1)=2$　　②

由①和②可得 $f'_x(1,1)=0, f'_y(1,1)=1$，故选（C）.

（3）设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的3次泰勒多项式为 $ax+bx^2+cx^3$，则

（A）$a=1,b=0,c=-\dfrac{7}{6}$　　（B）$a=1,b=0,c=\dfrac{7}{6}$

（C）$a=-1,b=-1,c=-\dfrac{7}{6}$　　（D）$a=-1,b=-1,c=\dfrac{7}{6}$

【答案】选（A）.

【解析】由麦克劳林公式得

$$f(x)=\frac{\sin x}{1+x^2}=\left[x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]\cdot[1-x^2+o(x^3)]=x-\frac{7}{6}x^3+o(x^3),$$

故$a=1,b=0,c=-\frac{7}{6}$.

（4）设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，则$\int_0^1 f(x)dx=$

（A）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\frac{1}{2n}$　（B）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\frac{1}{n}$

（C）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}f\left(\frac{k-1}{2k}\right)\frac{1}{n}$　（D）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}f\left(\frac{k}{2n}\right)\frac{2}{n}$

【答案】选（B）.

【解析】将区间$(0,1)$ n等分，取每个区间的中间值，根据题设定积分存在，则

$$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\frac{1}{n}.$$

（5）二次型$f(x_1,x_2x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$的正惯性指数与负惯性指数依次为

（A）2, 0　（B）1, 1　（C）2, 1　（D）1, 2

【答案】选（B）.

【解析 1】$f(x_1,x_2,x_3)=2x_2^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$，二次型矩阵为$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{bmatrix}$，

由矩阵A的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda-2&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda-3),$$

得A特征值为$-1,3,0$，则正、负惯性指数分别为$1,1$，故选（B）.

【解析 2】$f(x_1,x_2,x_3)=2x_2^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$

$$=2\left(\frac{1}{2}x_1+x_2+\frac{1}{2}x_3\right)^2-\frac{1}{2}x_1^2-\frac{1}{2}x_3^2+x_1x_3=2\left(\frac{1}{2}x_1+x_2+\frac{1}{2}x_3\right)^2-\frac{1}{2}(x_1-x_3)^2,$$

由以上标准形可得正、负惯性指数分别为$1,1$，故选（B）.

（6）已知$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}$，记$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-k\boldsymbol{\beta}_1$，

$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-l_1\boldsymbol{\beta}_1-l_2\boldsymbol{\beta}_2$，若$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$两两正交，则$l_1,l_2$依次为

（A）$\frac{5}{2},\frac{1}{2}$　（B）$-\frac{5}{2},\frac{1}{2}$　（C）$\frac{5}{2},-\frac{1}{2}$　（D）$-\frac{5}{2},-\frac{1}{2}$

【答案】选（A）.

【解析】利用施密特正交化，有

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2,$$

故$l_1=\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}=\frac{5}{2},l_2=\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}=\frac{1}{2}$.

（7）设A,B为n阶实矩阵，下列不成立的是

（A）$r\begin{pmatrix}A & O\\ O & A^TA\end{pmatrix}=2r(A)$

（B）$r\begin{pmatrix}A & AB\\ O & A^T\end{pmatrix}=2r(A)$

（C）$r\begin{pmatrix}A & BA\\ O & AA^T\end{pmatrix}=2r(A)$

（D）$r\begin{pmatrix}A & O\\ BA & A^T\end{pmatrix}=2r(A)$

【答案】选（C）.

【解析】由$r\begin{pmatrix}A & O\\ O & A^TA\end{pmatrix}=r(A)+r(A^TA)=r(A)+r(A)=2r(A)$，知（A）正确；

由于AB的列向量可由A的列向量线性表出，故$r\begin{pmatrix}A & AB\\ O & A^T\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}A & O\\ O & A^T\end{pmatrix}=2r(A)$，故（B）正确；

由于BA的行向量可由A的行向量线性表出，故$r\begin{pmatrix}A & O\\ BA & A^T\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}A & O\\ O & A^T\end{pmatrix}=2r(A)$，故（D）正确；

$r\begin{pmatrix}A & BA\\ O & AA^T\end{pmatrix}\geq r\begin{pmatrix}A & O\\ O & AA^T\end{pmatrix}=2r(A)$，答案选（C）.

（8）设A,B为随机事件，且$0<P(B)<1$，下列命题中为假命题的是

（A）若$P(A|B)=P(A)$，则$P\left(A|\overline{B}\right)=P(A)$

（B）若$P(A|B)>P(A)$，则$P\left(\overline{A}|\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}\right)$

（C）若$P(A|B)>P\left(A|\overline{B}\right)$，则$P(A|B)>P(A)$

（D）若$P(A|A\cup B)>P\left(\overline{A}|A\cup B\right)$，则$P(A)>P(B)$

【答案】选（D）.

【解析】$P(A|A\cup B)=\frac{P(A(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(AB)}$,

$$P\left(\overline{A}|A\cup B\right)=\frac{P\left(\overline{A}(A\cup B)\right)}{P(A\cup B)}=\frac{P\left(\overline{A}B\right)}{P(A\cup B)}=\frac{P(B)-P(AB)}{P(A)+P(B)-P(AB)},$$

由$P(A|A\cup B)>P\left(\overline{A}|A\cup B\right)$可得$P(A)>P(B)-P(AB)$，故选（D）.

【注】 由$P(A|B)=P(A)$知A与B相互独立，所以$P\left(A\middle|\bar{B}\right)=P(A)$，故（A）正确；若$P(A|B)>P(A)$，由对称性知$P\left(\bar{A}\middle|\bar{B}\right)>P\left(\bar{A}\right)$，故（B）正确；若$P(A|B)>P\left(A\middle|\bar{B}\right)$，则$\dfrac{P(AB)}{P(B)}>\dfrac{P\left(A\bar{B}\right)}{P\left(\bar{B}\right)}=\dfrac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$，所以$P(AB)>P(A)P(B)$，故（C）正确.

（9）设$(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots,(X_n,Y_n)$为来自总体$N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$的简单随机样本，令$\theta=\mu_1-\mu_2,\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i,\bar{Y}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}Y_i,\hat{\theta}=\bar{X}-\bar{Y}$，则

（A）$\hat{\theta}$是θ的无偏估计，$D\left(\hat{\theta}\right)=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$

（B）$\hat{\theta}$不是θ的无偏估计，$D\left(\hat{\theta}\right)=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$

（C）$\hat{\theta}$是θ的无偏估计，$D\left(\hat{\theta}\right)=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

（D）$\hat{\theta}$不是θ的无偏估计，$D\left(\hat{\theta}\right)=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

【答案】 选（C）.

【解析】 由题意可得

$$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2),\bar{X}\sim N\left(\mu_1,\frac{\sigma_1^2}{n}\right),\bar{Y}\sim N\left(\mu_2,\frac{\sigma_2^2}{n}\right),cov(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2,$$

由于(X,Y)服从二维正态分布，所以$\left(\bar{X},\bar{Y}\right)$也服从二维正态分布，则$\bar{X}-\bar{Y}$服从一维正态分布，于是$E\left(\hat{\theta}\right)=E\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)=E\left(\bar{X}\right)-E\left(\bar{Y}\right)=\theta$，故$\hat{\theta}$是$\theta$的无偏估计；

$$cov\left(\bar{X},\bar{Y}\right)=cov\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)=\frac{1}{n^2}cov\left(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)=\frac{n\rho\sigma_1\sigma_2}{n^2}=\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{n},$$

于是$D\left(\hat{\theta}\right)=D\left(\bar{X}-\bar{Y}\right)=D\left(\bar{X}\right)+D\left(\bar{Y}\right)-2cov\left(\bar{X},\bar{Y}\right)=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$，选（C）.

（10）设$x_1,x_2,\cdots,x_{16}$是来自总体$N(\mu,4)$的简单随机样本，考虑假设检验问题：$H_0:\mu\leqslant10,H_1:\mu>10$，$\Phi(x)$表示标准正态分布函数，若该检验问题的拒绝域为$W=\left\{\bar{X}\geqslant11\right\}$，其中$\bar{X}=\dfrac{1}{16}\sum\limits_{i=1}^{16}X_i$，则$\mu=11.5$时，该检验犯第二类错误的概率为

（A）$1-\Phi(0.5)$　（B）$1-\Phi(1)$　（C）$1-\Phi(1.5)$　（D）$1-\Phi(2)$

【答案】 选（B）.

【解析】检验犯第二类错误的概率为$P\{\overline{X}<11\}$.

由题意知$\overline{X}\sim N\left(11.5,\frac{1}{4}\right)$，所以

$$P\{\overline{X}<11\}=P\left\{\frac{\overline{X}-11.5}{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{11-11.5}{\frac{1}{2}}\right\}=1-\Phi(1).$$

二、填空题（本题共 6 小题，每小题共 5 份，共 30 分.）

（11）$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=$________.

【答案】$\frac{\pi}{4}$.

【解析】$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^2+1}=\arctan(x+1)\big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$.

（12）设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=2e^t+t+1,\\ y=4(t-1)e^t+t^2,\end{cases}$确定，则$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=$________.

【答案】$\frac{2}{3}$.

【解析】根据参数方程的求导法则，有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{4te^t+2t}{2e^t+1},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d\left(\frac{4te^t+2t}{2e^t+1}\right)/dt}{dx/dt}=\frac{(4e^t+4te^t+2)(2e^t+1)-(4te^t+2t)2e^t}{(2e^t+1)^3},$$

故$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=\frac{2}{3}$.

（13）欧拉方程$x^2y''+xy'-4y=0$满足条件$y(1)=1,y'(1)=2$的解为$y=$________.

【答案】x^2.

【解析】令$x=e^t$，则$xy'=\frac{dy}{dt},x^2y''=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}$，则原方程化为$\frac{d^2y}{dt^2}-4y=0$，其特征方程为$\lambda^2-4=0$，特征根为$\lambda_1=2,\lambda_2=-2$，其通解为

$$y=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}=C_1x^2+C_2x^{-2},$$

由初始条件$y(1)=1,y'(1)=2$得$C_1=1,C_2=0$，故满足初始条件的解为$y=x^2$.

（14）设Σ为空间区域$\{(x,y,z)\,|\,x^2+4y^2\leqslant4,0\leqslant z\leqslant2\}$表面的外侧，则曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+zdxdy=$________.

【答案】4π.

【解析】由高斯公式得

$$\iint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + zdxdy = \oiiint_{\Omega}(2x+2y+1)dv = \int_0^2 dz \iint_D dxdy = 4\pi .$$

（15）设 $A=(a_{ij})$ 为3阶矩阵，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，若 A 的每行元素之和均为2，且 $|A|=3$，则 $A_{11}+A_{21}+A_{31}=$________.

【答案】$\dfrac{3}{2}$.

【解析一】依题设由 $A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，根据特征值和特征向量的定义知 $\lambda=2$ 是矩阵 A 的特征值，$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda=2$ 的特征向量；则 A^* 的特征值为 $\dfrac{|A|}{\lambda}$，对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，

$$A^*\boldsymbol{\alpha}=\frac{|A|}{\lambda}\boldsymbol{\alpha}，\ A^*=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{bmatrix}，\ A^*\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\frac{|A|}{\lambda}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},$$

从而 $A_{11}+A_{21}+A_{31}=\dfrac{3}{2}$.

【解析二】依题设由 $A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，所以 $A^*A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=2A^*\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，$A^*\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\dfrac{|A|}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\dfrac{3}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，即 A^* 的每行元素之和为 $\dfrac{3}{2}$，故 $A_{11}+A_{21}+A_{31}=\dfrac{3}{2}$.

（16）甲、乙两个盒子中各装有2个红球和2个白球，先从甲盒中任取一球，观察颜色后放入乙盒中，再从乙盒中任取一球.令 X,Y 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红色球个数，则 X 与 Y 的相关系数为________.

【答案】$\dfrac{1}{5}$.

【解析】由题可得

$$(X,Y)\sim\begin{pmatrix}(0,0)&(0,1)&(1,0)&(1,1)\\ \frac{3}{10}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{3}{10}\end{pmatrix}，\ X\sim\begin{pmatrix}0&1\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix},Y\sim\begin{pmatrix}0&1\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}，\ XY\sim\begin{pmatrix}0&1\\ \frac{7}{10}&\frac{3}{10}\end{pmatrix},$$

$$EX=EY=\frac{1}{2},DX=DY=\frac{1}{4},E(XY)=\frac{3}{10},$$

$$cov(X,Y)=E(XY)-EXEY=\frac{1}{20},$$

则 $\rho_{XY}=\dfrac{1}{5}$.

三、解答题（本题共 6 小题，共 70 分.）

（17）（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

【解析一】本题为“$\infty-\infty$”型，通分后转化为“$\dfrac{0}{0}$”型.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin x\int_0^x e^{t^2}dt-e^x+1}{\sin x(e^x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin x\int_0^x e^{t^2}dt-e^x+1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\cos x\int_0^x e^{t^2}dt+\sin x e^{x^2}-e^x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-\sin x\int_0^x e^{t^2}dt+2\cos x e^{x^2}+2x\sin x e^{x^2}-e^x}{2}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

【解析二】由【解析一】知

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin x\int_0^x e^{t^2}dt-e^x+1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-e^x+1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\int_0^x e^{t^2}dt}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+o(x^2))-\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)+1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}.$$

（18）（本题满分 12 分）

设 $u_n(x)=e^{-nx}+\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}(n=1,2,\cdots)$，求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域及和函数.

【解析】记 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x),S_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-nx},S_2(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$，

当 $e^{-x}<1$，即 $x>0$ 时，等比级数 $S_1(x)$ 收敛，且 $S_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-nx}=\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}=\dfrac{1}{e^x-1}$；

$S_2(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$的收敛区间为$(-1,1)$，当$x=\pm1$时，$\left|\frac{1}{n(n+1)}\right|\sim\frac{1}{n^2}(n\to\infty)$，

因$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$收敛，所以$S_2(x)$的收敛域为$[-1,1]$，故原级数收敛域为

$(0,1]$，且$S(x)=S_1(x)+S_2(x)$，

$$S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=-x\ln(1-x)-[-\ln(1-x)-x]$$
$$=(1-x)\ln(1-x)+x,x\in(0,1),$$

$$S_2(1)=\lim_{x\to1^-}S_2(x)=1,$$

$$所以S(x)=\begin{cases}\frac{1}{e^x-1}+(1-x)\ln(1-x)+x,x\in(0,1)\\ \frac{e}{e-1}, & x=1\end{cases}.$$

（19）（本题满分 12 分）

已知曲线$C:\begin{cases}x^2+2y^2-z=6\\4x+2y+z=30\end{cases}$，求$C$上的点到$xOy$坐标面距离的最大值.

【解析】取C上点(x,y,z)到xOy坐标面距离为$|z|$，设目标函数为$f(x,y,z)=z^2$，

令$F(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x^2+2y^2-z-6)+\mu(4x+2y+z-30)$，

由$\begin{cases}F'_x=2\lambda x+4\mu=0\\F'_y=4\lambda y+2\mu=0\\F'_z=2z-\lambda+\mu=0\\F'_\lambda=x^2+2y^2-z-6=0\\F'_\mu=4x+2y+z-30=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=4\\y=1\\z=12\end{cases}$或$\begin{cases}x=-8\\y=-2\\z=66\end{cases}$，且$f(4,1,12)=12^2$，

$f(-8,-2,66)=66^2$，故曲线上的点到xOy坐标面距离的最大值为66.

（20）（本题满分 12 分）

设$D\subset R^2$是有界单连通闭区域，$I(D)=\iint\limits_D(4-x^2-y^2)dxdy$取得最大值的积分区域记为$D_1$.

（Ⅰ）求$I(D_1)$的值；

（Ⅱ）计算

$$\int_{\partial D_1}\frac{\left(xe^{x^2+4y^2}+y\right)dx+\left(4ye^{x^2+4y^2}-x\right)dy}{x^2+4y^2}$$

其中∂D_1是D_1的正向边界.

【解析】（Ⅰ）要使$I(D)=\iint\limits_D(4-x^2-y^2)dxdy$最大，则$D$应包含所有使得被积函数$f(x,y)=4-x^2-y^2\geq 0$且$D$中不能包含使得$f(x,y)=4-x^2-y^2<0$的区域，故$D_1=\{(x,y)\,|x^2+y^2\leqslant 4\}$，从而

$$I(D_1)=\iint\limits_{D_1}(4-x^2-y^2)dxdy=4\iint\limits_{D_1}dxdy-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)dxdy$$
$$=16\pi-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3dr=16\pi-8\pi=8\pi.$$

（Ⅱ）补曲线$L:x^2+4y^2=\varepsilon^2,\varepsilon$为足够小的正数，取顺时针方向，记$\partial D_1$与$L$围成的闭区域为$D'$，$L$围成的闭区域为$D''$，由于

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{(8xye^{x^2+4y^2}-1)(x^2+4y^2)-(4ye^{x^2+4y^2}-x)2x}{(x^2+4y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

由格林公式得

$$\int\limits_{\partial D_1}Pdx+Qdy=\oint\limits_{\partial D_1+L}Pdx+Qdy-\oint\limits_{L}Pdx+Qdy$$
$$=\iint\limits_{D'}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy-\frac{1}{\varepsilon^2}\oint\limits_{L}(xe^{\varepsilon^2}+y)dx+(4ye^{\varepsilon^2}-x)dy$$
$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{D''}(-1-1)dxdy=-\pi.$$

（21）（本题满分 12 分）

已知$A=\begin{bmatrix} a & 1 & -1\\ 1 & a & -1\\ -1 & -1 & a\end{bmatrix}$.

（Ⅰ）求正交矩阵P，使得P^TAP为对角矩阵;

（Ⅱ）求正定矩阵C，使得$C^2=(a+3)E-A$，其中E为3阶单位矩阵.

【解析】（Ⅰ）由矩阵A的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & -1 & 1\\ -1 & \lambda-a & 1\\ 1 & 1 & \lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-a+1)^2(\lambda-a-2),$$

得矩阵A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=a-1,\lambda_3=a+2$.

当$\lambda_1=\lambda_2=a-1$时，由$((a-1)E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，对其系数矩阵作初等行变换，得

$$((a-1)E-A)=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}，得特征向量为\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix};$$

当$\lambda_3=a+2$时，由$((a+2)E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，对其系数矩阵作初等行变换，得

$$((a+2)E-A)=\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$，得对应的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$；

对$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$正交化，令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}.$$

对$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$单位化，有

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix},$$

令$P=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$，则

$$P^TAP=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}a-1&&\\&a-1&\\&&a+2\end{bmatrix}.$$

（Ⅱ）因为

$$C^2=(a+3)E-A=(a+3)PP^T-P\Lambda P^T=P((a+3)E-\Lambda)P^T$$

$$=P\begin{bmatrix}4&&\\&4&\\&&1\end{bmatrix}P^T=P\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{bmatrix}P^TP\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{bmatrix}P^T,$$

所以$C=P\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{bmatrix}P^T=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}5&-1&1\\-1&5&1\\1&1&5\end{bmatrix}$.

（22）（本题满分 12 分）

在区间$(0,2)$上随机取一点，将该区间分成两段，较短一段的长度记为X，较长一段的长度记为Y.令$Z=\frac{Y}{X}$.

（Ⅰ）求X的概率密度；

（Ⅱ）求Z的概率密度；

（Ⅲ）求$E\left(\frac{X}{Y}\right)$.

【解析】（Ⅰ）$X+Y=2,X<Y$，由题意可得，$X\sim U(0,1)$，则X的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}1,0<x<1\\0,\quad 其他\end{cases};$$

（Ⅱ）由题意可得$Y=2-X$，即$Z=\dfrac{2-X}{X}$，先求Z的分布函数：

$$F_Z=P\{Z\le z\}=P\left\{\frac{2-X}{X}\le z\right\}=P\left\{\frac{2}{X}-1\le z\right\};$$

当$z<1$时，$F_Z(z)=0$；

当$z\ge 1$时，$F_Z(z)=P\left\{\dfrac{2}{X}-1\le z\right\}=1-P\left\{X\le\dfrac{2}{z+1}\right\}=1-\int_0^{\frac{2}{z+1}}1\,\mathrm{d}x=1-\dfrac{2}{z+1}$，

所以Z的概率密度为$f_Z(z)=(F_Z(z))'=\begin{cases}\dfrac{2}{(z+1)^2}, & z\ge 1\\ 0, & 其他\end{cases}$.

（Ⅲ）$E\left(\dfrac{X}{Y}\right)=E\left(\dfrac{X}{2-X}\right)=\int_0^1\dfrac{x}{2-x}\cdot 1\,\mathrm{d}x=2\ln 2-1$.