2021 年数学二试题

一、选择题（本题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分.）

（1）当$x\to 0$时，$\int_0^{x^2}\left(e^{t^3}-1\right)dt$是$x^7$的

（A）低阶无穷小　　（B）等价无穷小

（C）高阶无穷小　　（D）同阶但非等价无穷小

（2）函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$在$x=0$处

（A）连续且取极大值　　（B）连续且取极小值

（C）可导且导数为0　　（D）可导且导数不为0

（3）有一圆柱体地面半径与高随时间变化的速率分别为$2cm/s$，$-3cm/s$，当地面半径为$10cm$，高为$5cm$时，圆柱体的体积与表面积随时间变化的速率分别为

（A）$125\pi cm^3/s, 40\pi cm^2/s$　　（B）$125\pi cm^3/s, -40\pi cm^2/s$

（C）$-100\pi cm^3/s, 40\pi cm^2/s$　　（D）$-100\pi cm^3/s, -40\pi cm^2/s$

（4）设函数$f(x)=ax-b\ln x(a>0)$有两个零点，则$\dfrac{b}{a}$的取值范围是

（A）$(e,+\infty)$　　（B）$(0,e)$　　（C）$\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$　　（D）$\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$

（5）设函数$f(x)=\sec x$在$x=0$处的2阶泰勒多项式为$1+ax+bx^2$，则

（A）$a=1,b=-\dfrac{1}{2}$　　（B）$a=1,b=\dfrac{1}{2}$　　（C）$a=0,b=-\dfrac{1}{2}$　　（D）$a=0,b=\dfrac{1}{2}$

（6）设函数$f(x,y)$可微，$f(x+1,e^x)=x(x+1)^2, f(x,x^2)=2x^2\ln x$，则$\mathrm{d}f(1,1)=$

（A）$\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$　　（B）$\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$　　（C）$\mathrm{d}y$　　（D）$-\mathrm{d}y$

（7）设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，则$\int_0^1 f(x)dx=$

（A） $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{2n}$ （B） $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$

（C） $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\dfrac{k-1}{2k}\right)\dfrac{1}{n}$ （D） $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{2n}$

（8）二次型 $f(x_1,x_2x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为

（A）2, 0 （B）1, 1 （C）2, 1 （D）1, 2

（9）设3阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表出，则

（A） $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解 （B） $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解

（C） $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解 （D） $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解

（10）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&-5\end{bmatrix}$，若下三角可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和上三角可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{PAQ}$ 为对角矩阵，则 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 可以分别取

（A） $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}$ （B） $\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

（C） $\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}$ （D） $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&-3\\0&-1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$

二、填空题（本题共 6 小题，每小题共 5 份，共 30 分.）

（11） $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|3^{-x^2}dx=$______.

（12）设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2e^t+t+1, & x<0\\ y=4(t-1)e^t+t^2, x\geqslant 0\end{cases}$ 确定，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=$______.

（13）设函数$z=z(x,y)$由方程$(x+1)z+y\ln z-\arctan(2xy)=1$确定，则$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,2)}=$ ________.

（14）已知函数$f(t)=\int_1^{t^2}dx\int_{\sqrt{x}}^{t}\sin\dfrac{x}{y}dy$，则$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=$ ________.

（15）微分方程$y'''-y=0$的通解$y=$ ________.

（16）多项式$f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$中的$x^3$项的系数为________.

三、解答题（本题共 6 小题，共 70 分.）

（17）（本题满分 10 分）

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

（18）（本题满分 12 分）

已知$f(x)=\dfrac{x|x|}{1+x}$，求$f(x)$的凹凸区间及渐近线.

（19）（本题满分 12 分）

设函数$f(x)$满足$\int \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{6}x^2-x+C$，$L$为曲线$y=f(x)\,(4\leqslant x\leqslant 9)$.记$L$的弧长为$s$，$L$绕$x$轴旋转所形成的旋转曲面面积为$A$，求$s$和$A$.

（20）（本题满分 12 分）

设函数$y=y(x)\,(x>0)$是微分方程$xy'-6y=-6$满足条件$y\left(\sqrt{3}\right)=10$的解.

（Ⅰ）求$y(x)$；

（Ⅱ）P为曲线$y=y(x)$上的一点，曲线$y=y(x)$在点P的法线在y轴上的截距为I_p，为使I_p最小，求P的坐标.

（21）（本题满分 12 分）

设平面区域D由曲线$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2\ (x\geqslant 0,y\geqslant 0)$与$x$轴围成，求$\iint\limits_D xydxdy$.

（22）（本题满分 12 分）

设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\1&a&b\end{bmatrix}$仅有两个不同的特征值.若$\boldsymbol{A}$相似于对角矩阵，求$a,b$的值，并求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$为对角矩阵.