2021 年数学二试题解析

一、选择题（本题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分.）

（1）当$x\to 0$时，$\int_0^{x^2}\left(e^{t^3}-1\right)dt$是$x^7$的

（A）低阶无穷小　　（B）等价无穷小

（C）高阶无穷小　　（D）同阶但非等价无穷小

【答案】 选（C）.

【解析一】 当$x\to 0$时，$\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)dt\sim\int_0^{x^2}t^3dt==\frac{1}{4}x^8$，故$\int_0^{x^2}\left(e^{t^3}-1\right)dt$是$x^7$的高阶无穷小，答案选（C）.

【解析二】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)\mathrm{d}t}{x^7}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x(e^{x^6}-1)}{7x^6}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{7}x=0$，故选（C）.

（2）函数$f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x},x\neq 0\\ 1, \quad x=0\end{cases}$在$x=0$处

（A）连续且取极大值　　（B）连续且取极小值

（C）可导且导数为0　　（D）可导且导数不为0

【答案】 选（D）.

【解析】 因为$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1=f(0)$，所以$f(x)$在$x=0$处连续；

因为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\frac{1}{2}$，所以$f'(0)=\frac{1}{2}$.

（3）有一圆柱体地面半径与高随时间变化的速率分别为$2cm/s,-3cm/s$，当地面半径为$10cm$，高为$5cm$时，圆柱体的体积与表面积随时间变化的速率分别为

（A）$125\pi cm^3/s,40\pi cm^2/s$　　（B）$125\pi cm^3/s,-40\pi cm^2/s$

（C）$-100\pi cm^3/s,40\pi cm^2/s$　　（D）$-100\pi cm^3/s,-40\pi cm^2/s$

【答案】 选（C）.

【解析】 设地面半径为r，高为h，则$\frac{dr}{dt}=2,\frac{dh}{dt}=-3$.圆柱的体积为$V=\pi r^2h$，表面积为$S=2\pi r^2+2\pi rh$，于是

$$\frac{dV}{dt}=2\pi rh\frac{dr}{dt}+\pi r^2\frac{dh}{dt},\frac{dS}{dt}=4\pi r\frac{dr}{dt}+2\pi h\frac{dr}{dt}+2\pi r\frac{dh}{dt},$$

将$r=10,h=5,\dfrac{dr}{dt}=2,\dfrac{dh}{dt}=-3$代入上二式，得

$$\frac{dV}{dt}=-100\pi cm^3/s,\ \frac{dS}{dt}=40\pi cm^2/s.$$

（4）设函数$f(x)=ax-b\ln x(a>0)$有两个零点，则$\dfrac{b}{a}$的取值范围是

（A）$(e,+\infty)$　（B）$(0,e)$　（C）$\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$　（D）$\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$

【答案】选（A）.

【解析】由题可得$x>0$，令$f'(x)=a-\dfrac{b}{x}=0$，可得$x=\dfrac{b}{a}$，$f''(x)=\dfrac{b}{x^2}$，

若$b<0$，则$f'(x)>0$，则此时至多一个零点，故$b>0$，则$f''(x)>0$，于是在$x=\dfrac{b}{a}$处取得极小值$f\left(\dfrac{b}{a}\right)=a\cdot\dfrac{b}{a}-b\ln\dfrac{b}{a}=b-b\ln\dfrac{b}{a}$，又

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(ax-b\ln x)=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(ax-b\ln x)=+\infty,$$

故函数有两个零点只需满足$f\left(\dfrac{b}{a}\right)=b-b\ln\dfrac{b}{a}<0$即可，即$\dfrac{b}{a}-\dfrac{b}{a}\ln\dfrac{b}{a}<0$，解得$\dfrac{b}{a}>e$.

（5）设函数$f(x)=\sec x$在$x=0$处的2阶泰勒多项式为$1+ax+bx^2$，则

（A）$a=1,b=-\dfrac{1}{2}$　（B）$a=1,b=\dfrac{1}{2}$　（C）$a=0,b=-\dfrac{1}{2}$　（D）$a=0,b=\dfrac{1}{2}$

【答案】选（D）.

【解析】由$f(x)=\sec x$得，$f'(x)=\sec x\tan x,f''(x)=\sec x\tan^2x+\sec^3x$，由泰勒公式系数具有唯一性得，$a=\dfrac{f'(0)}{1!}=0,b=\dfrac{f''(0)}{2!}=\dfrac{1}{2}$.

（6）设函数$f(x,y)$可微，$f(x+1,e^x)=x(x+1)^2,f(x,x^2)=2x^2\ln x$，则$\mathrm{d}f(1,1)=$

（A）$\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$　（B）$\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$　（C）$\mathrm{d}y$　（D）$-\mathrm{d}y$

【答案】选（C）.

【解析】$\mathrm{d}f(x,y)=f_1'(x,y)\mathrm{d}x+f_2'(x,y)\mathrm{d}y$，

$f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$对x求导可得

$$f_1'(x+1,e^x)+e^xf_2'(x+1,e^x)=(x+1)^2+2x(x+1),$$

将$x=0$带入可得$f_1'(1,1)+f_2'(1,1)=1$　①

在$f(x,x^2)=2x^2\ln x$两边对x求导可得

$$f_1'(x,x^2)+2xf_2'(x,x^2)=4x\ln x+2x$$

将$x=1$带入可得$f_1'(1,1)+2f_2'(1,1)=2$ ②

由①和②可得$f_1'(1,1)=0,f_2'(1,1)=1$，故选（C）.

（7）设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，则$\int_0^1 f(x)dx=$

（A）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\frac{1}{2n}$ （B）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\frac{1}{n}$

（C）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k-1}{2k}\right)\frac{1}{n}$ （D）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\frac{1}{2n}$

【答案】选（B）.

【解析】将区间$(0,1)$ n等分，取每个区间的中间值，根据题设定积分存在，则

$$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\frac{1}{n}.$$

（8）二次型$f(x_1,x_2x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$的正惯性指数与负惯性指数依次为

（A）2,0 （B）1,1 （C）2,1 （D）1,2

【答案】选（B）.

【解析 1】$f(x_1,x_2,x_3)=2x_2^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{bmatrix}$，

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda-2&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda-3)$$，故特征值为$-1,3,0$，则正负惯性指数分别为$1,1$，故选（B）.

【解析 1】$f(x_1,x_2,x_3)=2x_2^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$

$$=2\left(\frac{1}{2}x_1+x_2+\frac{1}{2}x_3\right)^2-\frac{1}{2}x_1^2-\frac{1}{2}x_3^2+x_1x_3=2\left(\frac{1}{2}x_1+x_2+\frac{1}{2}x_3\right)^2-\frac{1}{2}(x_1-x_3)^2,$$

由以上标准形可得正负惯性指数分别为$1,1$，故选（B）.

（9）设3阶矩阵$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$可以由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性表出，则

（A）$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解　　（B）$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解

（C）$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解　　（D）$\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解

【答案】选（D）.

【解析】因为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表出，则存在矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$，转置得 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{B}^T=\boldsymbol{A}^T$.若对 $\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，故 $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，答案选（D）.

（10）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&-5\end{bmatrix}$，若下三角可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和上三角可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{PAQ}$ 为对角矩阵，则 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 可以分别取

（A）$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}$　　（B）$\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

（C）$\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}$　　（D）$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&-3\\0&-1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$

【答案】选（C）.

【解析】$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\begin{bmatrix}1&0&-1&1&0&0\\2&-1&1&0&1&0\\-1&2&-5&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&1&0&0\\0&-1&3&-2&1&0\\0&2&-6&1&0&1\end{bmatrix}$

$\to\begin{bmatrix}1&0&-1&1&0&0\\0&1&-3&2&-1&0\\0&0&0&-3&2&1\end{bmatrix}=(\boldsymbol{B},\boldsymbol{P})$，即 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{E}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-3\\0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Lambda}\\\boldsymbol{Q}\end{bmatrix}，则\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

二、填空题（本题共 6 小题，每小题共 5 份，共 30 分.）

（11）$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|3^{-x^2}dx=$________.

【答案】$\dfrac{1}{\ln 3}$.

【解析】$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|3^{-x^2}dx=2\int_0^{+\infty}x3^{-x^2}dx=-\int_0^{+\infty}3^{-x^2}d(-x^2)=-\dfrac{1}{\ln 3}\cdot 3^{-x^2}\Big|_0^{+\infty}=\dfrac{1}{\ln 3}$.

（12）设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases} x=2e^t+t+1, & x<0 \\ y=4(t-1)e^t+t^2, & x\geqslant 0 \end{cases}$确定，则$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=$

________.

【答案】$\dfrac{2}{3}$.

【解析】根据参数方程的求导法则，有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{4te^t+2t}{2e^t+1},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d\left(\frac{4te^t+2t}{2e^t+1}\right)/dt}{dx/dt}=\frac{(4e^t+4te^t+2)(2e^t+1)-(4te^t+2t)2e^t}{(2e^t+1)^3},$$

故$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=\dfrac{2}{3}$.

（13）设函数$z=z(x,y)$由方程$(x+1)z+y\ln z-\arctan(2xy)=1$确定，则$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,2)}=$

________.

【答案】1.

【解析】当$x=0,y=2$时，$z=1$.令$F(x,y,z)=(x+1)z+y\ln z-\arctan(2xy)-1$，则

$F'_x=z-\dfrac{2y}{1+(2xy)^2}, F'_z=(x+1)+\dfrac{y}{z}$，故$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,2)}=-\left.\dfrac{F'_x}{F'_z}\right|_{(0,2,1)}=1$.

（14）已知函数$f(t)=\displaystyle\int_1^{t^2}dx\int_{\sqrt{x}}^{t}\sin\frac{x}{y}dy$，则$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=$________.

【答案】$\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{2}{\pi}$.

【解析】交换积分次序得

$$f(t)=\int_1^{t^2}dx\int_{\sqrt{x}}^{t}\sin\frac{x}{y}dy=\int_1^{t}dy\int_1^{y^2}\sin\frac{x}{y}dx=\int_1^{t}\left(y\cos\frac{1}{y}-y\cos y\right)dy,$$

于是$f'(t)=t\cos\dfrac{1}{t}-t\cos t, f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{2}{\pi}$.

（15）微分方程$y'''-y=0$的通解$y=$________.

【答案】$C_1e^x+C_2e^{-\frac{1}{2}x}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+C_3e^{-\frac{1}{2}x}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$，其中$C_1,C_2,C_3$为任意常数.

【解析】由微分方程的特征方程为$\lambda^3-1=0$，得特征根为

$$\lambda_1=1,\lambda_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\lambda_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

故通解为$y=C_1e^x+C_2e^{-\frac{1}{2}x}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+C_3e^{-\frac{1}{2}x}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$，其中$C_1,C_2,C_3$为任意常数.

（16）多项式$f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$中的$x^3$项的系数为________.

【答案】-5.

【解析】只考虑函数中含有x^3的项

$$-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}=-x^3-4x^3=-5x^3,$$

故x^3项的系数为-5.

三、解答题（本题共 6 小题，共 70 分.）

（17）（本题满分 10 分）

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

【解析一】本题为“$\infty-\infty$”型，通分后转化为“$\dfrac{0}{0}$”型.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin x\int_0^x e^{t^2}dt-e^x+1}{(e^x-1)\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin x\int_0^x e^{t^2}dt-e^x+1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\cos x\int_0^x e^{t^2}dt+e^{x^2}\sin x-e^x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-\sin x\int_0^x e^{t^2}dt+2e^{x^2}\cos x+2xe^{x^2}\sin x-e^x}{2}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

【解析二】由【解析一】知

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin x\int_0^x e^{t^2}dt-e^x+1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-e^x+1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\int_0^x e^{t^2}dt}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+o(x^2))-\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)+1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}.$$

（18）（本题满分 12 分）

已知$f(x)=\dfrac{x|x|}{1+x}$，求$f(x)$的凹凸区间及渐近线.

【解析】显然$x=-1$为间断点.

当$x>0$时，$f(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$，则$f'(x)=\dfrac{x^2+2x}{(1+x)^2},f''(x)=\dfrac{2}{(1+x)^3}>0$，故$f(x)$在$(0,+\infty)$上是凹的；

当$x<0$且$x\neq-1$时，$f(x)=-\dfrac{x^2}{1+x}$，则$f'(x)=-\dfrac{x^2+2x}{(1+x)^2},f''(x)=-\dfrac{2}{(1+x)^3}$.

①当$x<-1$时，$f''(x)=-\dfrac{2}{(1+x)^3}>0$，故$f(x)$在$(-\infty,-1)$上是凹的；

②当$-1<x<0$是，$f''(x)=-\dfrac{2}{(1+x)^3}<0$，故$f(x)$在$(-1,0)$上是凸的；

由$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x|x|}{1+x}=\infty$，知$x=-1$为$y=f(x)$的垂直渐近线；

由$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x|x|}{1+x}=\infty$，知曲线$y=f(x)$无水平渐近线；

由

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(1+x)}=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{1+x}-x\right)=-1,$$

知$y=x-1$为曲线$y=f(x)$的斜渐近线.

由

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{(1+x)}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2}{1+x}+x\right)=1,$$

知$y=-x+1$为曲线$y=f(x)$的斜渐近线.

（19）（本题满分 12 分）

设函数$f(x)$满足$\displaystyle\int\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{6}x^2-x+C$，$L$为曲线$y=f(x)\ (4\leqslant x\leqslant 9)$.记$L$的弧长为$s$，$L$绕$x$轴旋转所形成的旋转曲面面积为$A$，求$s$和$A$.

【解析】依题设，有$\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}=\left(\dfrac{1}{6}x^2-x+C\right)'=\dfrac{1}{3}x-1$，$f(x)=\dfrac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-\sqrt{x}$，$f'(x)=\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$，故

$$s=\int_4^9\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=\int_4^9\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx=\int_4^9\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+\sqrt{x}\right)\Big|_4^9=\frac{22}{3}.$$

$$A=\int_4^9 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=2\pi\int_4^9\left(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-\sqrt{x}\right)\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx$$

$$=\frac{2}{3}\pi\int_4^9\left(x^{\frac{3}{2}}-3\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=\frac{1}{3}\pi\int_4^9(x-3)(x+1)\,dx=\frac{425}{9}\pi.$$

（20）（本题满分 12 分）

设函数$y=y(x)\ (x>0)$是微分方程$xy'-6y=-6$满足条件$y\left(\sqrt{3}\right)=10$的解.

（Ⅰ）求$y(x)$；

（Ⅱ）P为曲线$y=y(x)$上的一点，曲线$y=y(x)$在点P的法线在y轴上的截距为I_p，为使I_p最小，求P的坐标.

【解析】（Ⅰ）方程变形为$y'-\dfrac{6}{x}y=-\dfrac{6}{x}$，由一阶线性微分方程的通解公式得

$$y=e^{\int\frac{6}{x}dx}\left[\int\left(-\frac{6}{x}\right)e^{-\int\frac{6}{x}dx}dx+C\right]=x^6\left(x^{-6}+C\right)=Cx^6+1,$$

由$y\left(\sqrt{3}\right)=10$，得$C=\dfrac{1}{3}$，故$y(x)=\dfrac{1}{3}x^6+1,(x>0)$.

（Ⅱ）设点P的坐标为$\left(x,\dfrac{1}{3}x^6+1\right)$，$y'(x)=2x^5$，故点$P$处的法线方程为

$$Y-\left(\frac{1}{3}x^6+1\right)=-\frac{1}{2x^5}(X-x),$$

令$X=0$，得$I_p=\dfrac{1}{2x^4}+\dfrac{1}{3}x^6+1$，由$\dfrac{dI_p}{dx}=2x^5-2x^{-5}=\dfrac{2\left(x^{10}-1\right)}{x^5}=0$，得驻点$x=1$.

又$\dfrac{d^2I_p}{dx^2}\Big|_{x=1}=\left(10x^4+10x^{-6}\right)\Big|_{x=1}=20>0$，故$x=1$是函数$y=y(x)$在$(0,+\infty)$内的唯一极小值点，也是最小值点，此时$P$的坐标为$\left(1,\dfrac{4}{3}\right)$.

（21）（本题满分 12 分）

设平面区域D由曲线$\left(x^2+y^2\right)^2=x^2-y^2\ (x\geqslant0,y\geqslant0)$与$x$轴围成，求$\iint\limits_D xy\,dxdy$.

【解析】$\iint\limits_D xy\,dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sqrt{\cos2\theta}}r^2\sin\theta\cos\theta\cdot r\,dr=\dfrac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\cos\theta\cos^2 2\theta\,d\theta$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2\theta\cos^2 2\theta d\theta \overset{u=2\theta}{=} \frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin u(1-\sin^2 u)du$$

$$=\frac{1}{16}\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{48}.$$

（22）（本题满分 12 分）

设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\1&a&b\end{bmatrix}$仅有两个不同的特征值.若$\boldsymbol{A}$相似于对角矩阵，求$a,b$的值，并求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$为对角矩阵.

【解析】由$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\-1&\lambda-2&0\\-1&-a&\lambda-b\end{vmatrix}=(\lambda-b)(\lambda-3)(\lambda-1)=0$，

当$b=3$时，即$\lambda=3$为二重特征值，此时$\boldsymbol{A}$可相似对角化需满足$\lambda=3$对应两个线性无关的特征向量，即$r(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$，$3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\-1&-a&0\end{bmatrix}$,$a=-1$，

此时，$\lambda_1=\lambda_2=3$对应的线性无关特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^T$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,0,1)^T$；

$\lambda_3=1$，$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&-1&0\\-1&-1&0\\-1&1&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$，对应特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,1)^T$，

令$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}3&&\\&3&\\&&1\end{bmatrix}$.

当$b=1$时，即$\lambda=1$为二重特征值，类似以上求法，可得

$\lambda_1=\lambda_2=1$所对应特征向量为$\boldsymbol{\beta}_1=(-1,1,0)^T$,$\boldsymbol{\beta}_2=(0,0,1)^T$，

$\lambda_3=3$所对应特征向量为$\boldsymbol{\beta}_3=(1,1,1)^T$，

令$\boldsymbol{P}_1=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$,$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{AP}_1=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&3\end{bmatrix}$.