2021 考研数学三试题解析

一、选择题（本题共 10 题，每小题 5 分，共 50 分）

（1）当$x\to 0$时，$\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)\mathrm{d}t$是$x^7$的

（A）低阶无穷小　　（B）等价无穷小

（C）高阶无穷小　　（D）同阶但非等价无穷小

（2）函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x},x\neq 0\\ 1,x=0\end{cases}$，在$x=0$处

（A）连续且取极大值　　（B）连续且取极小值

（C）可导且导数为0　　（D）可导且导数不为0

（3）设函数$f(x)=ax-b\ln x(a>0)$有两个零点，则$\dfrac{b}{a}$的取值范围是

（A）$(e,+\infty)$　　（B）$(0,e)$　　（C）$\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$　　（D）$\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$

（4）设函数$f(x,y)$可微，$f(x+1,e^x)=x(x+1)^2,f(x,x^2)=2x^2\ln x$，则$\mathrm{d}f(1,1)=$

（A）$\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$　　（B）$\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$　　（C）$\mathrm{d}y$　　（D）$-\mathrm{d}y$

（5）二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$的正惯性指数与负惯性指数依次为

（A）2,0　　（B）1,1　　（C）2,1　　（D）1,2

（6）设$A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$为4阶正交矩阵，若矩阵$B=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\\ \boldsymbol{\alpha}_2^T\\ \boldsymbol{\alpha}_3^T\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，$k$表示任意常数，则线性方程组$B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$的通解$\boldsymbol{x}=$

（A）$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_1$　　（B）$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_2$

（C）$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_3$　　（D）$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+k\boldsymbol{\alpha}_4$

（7）已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&-5\end{bmatrix}$，若下三角可逆矩阵$\boldsymbol{P}$和上三角可逆矩阵$\boldsymbol{Q}$，使$\boldsymbol{PAQ}$

为对角矩阵，则$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$可以分别取

（A）$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}$　　（B）$\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

（C）$\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}$　　（D）$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&-3\\0&-1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$

（8）设A,B为随机事件，且$0<P(B)<1$，下列命题中不成立的是

（A）若$P(A|B)=P(A)$，则$P\left(A|\overline{B}\right)=P(A)$

（B）若$P(A|B)>P(A)$，则$P\left(\overline{A}|\overline{B}\right)>P\left(\overline{A}\right)$

（C）若$P(A|B)>P\left(A|\overline{B}\right)$，则$P(A|B)>P(A)$

（D）若$P(A|A\cup B)>P\left(\overline{A}|A\cup B\right)$，则$P(A)>P(B)$

（9）设$(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots,(X_n,Y_n)$为来自总体$N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$的简单随机样本，令

$\theta=\mu_1-\mu_2,\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i,\hat{\theta}=\overline{X}-\overline{Y}$，则

（A）$E\left(\hat{\theta}\right)=\theta,D\left(\hat{\theta}\right)=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$

（B）$E\left(\hat{\theta}\right)=\theta,D\left(\hat{\theta}\right)=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

（C）$E\left(\hat{\theta}\right)\neq\theta,D\left(\hat{\theta}\right)=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$

（D）$E\left(\hat{\theta}\right)\neq\theta,D\left(\hat{\theta}\right)=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

（10）设总体X的概率分布为$P\{X=1\}=\frac{1-\theta}{2},P\{X=2\}=P\{X=3\}=\frac{1+\theta}{4}$，则利用来自总体的样本值$1,3,2,2,1,3,1,2$，可得$\theta$的最大似然估计值为

（A）$\frac{1}{4}$　　（B）$\frac{3}{8}$　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）$\frac{5}{2}$

二、填空题（本题共 6 题，每小题 5 分，共 30 分）

（11）若$y=\cos e^{-\sqrt{x}}$，则$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=$______.

（12）$\displaystyle\int_{\sqrt{5}}^{5}\frac{x}{\sqrt{|x^2-9|}}\mathrm{d}x=$______.

（13）设平面区域D由曲线$y=\sqrt{x}\sin\pi x\,(0\le x\le 1)$与$x$轴围成，则$D$绕$x$轴旋转所成旋转体的体积为______.

（14）差分方程$\triangle y_t=t$的通解为______.

（15）多项式$f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$中$x^3$项的系数为______.

（16）甲乙两个盒子中各装有 2 个红球和2 个白球，先从甲盒中任取一球，观察颜色后放入乙盒中，再从乙盒中任取一球，令X,Y分别表示从甲盒中和乙盒中取到的红球个数，则X与Y的相关系数______.

三、解答题（本题共 6 小题，共 70 分）

（17）（本题满分 10 分）

已知$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left[a\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]$存在，求$a$的值.

（18）（本题满分 12 分）

求函数 $f(x,y)=2\ln|x|+\dfrac{(x-1)^2+y^2}{2x^2}$ 的极值.

（19）（本题满分 12 分）

设有界区域 D 是圆 $x^2+y^2=1$ 和直线 $y=x$ 以及 x 轴在第一象限围成的部分，计算二重积分 $\iint\limits_D e^{(x+y)^2}(x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

（20）（本题满分 12 分）

设 n 为正整数，$y=y_n(x)$ 是微分方程 $xy'-(n+1)y=0$ 满足条件 $y_n(1)=\dfrac{1}{n(n+1)}$ 的解.

（Ⅰ）求 $y_n(x)$；

（Ⅱ）求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n(x)$ 的收敛域及和函数.

（21）（本题满分 12 分）

设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\1&a&b\end{bmatrix}$仅有两个不同的特征值.若$\boldsymbol{A}$相似与对角矩阵，求$a,b$的值，并求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$为对角矩阵.

（22）（本题满分 12 分）

在区间$(0,2)$上随机取一点，将该区间分成两段，较短一段的长度记为X，较长一段的长度记为Y.令$Z=\dfrac{Y}{X}$.

（Ⅰ）求X的概率密度；

（Ⅱ）求Z的概率密度；

（Ⅲ）求$E\left(\dfrac{X}{Y}\right)$.