2021 考研数学三试题解析

一、选择题（本题共 10 题，每小题 5 分，共 50 分）

（1）当$x\to 0$时，$\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)\mathrm{d}t$是$x^7$的

（A）低阶无穷小　　（B）等价无穷小

（C）高阶无穷小　　（D）同阶但非等价无穷小

【答案】选（C）.

【解析一】当$x\to 0$时，$\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)dt\sim\int_0^{x^2}t^3dt==\frac{1}{4}x^8$，故$\int_0^{x^2}\left(e^{t^3}-1\right)dt$是$x^7$的高阶无穷小，答案选（C）.

【解析二】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)\mathrm{d}t}{x^7}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x(e^{x^6}-1)}{7x^6}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{7}x=0$，故选（C）

（2）函数$f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x},x\neq 0\\1,x=0\end{cases}$，在$x=0$处

（A）连续且取极大值　　（B）连续且取极小值

（C）可导且导数为0　　（D）可导且导数不为0

【答案】选（D）.

【解析】因为$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1=f(0)$，所以$f(x)$在$x=0$处连续；

因为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\frac{1}{2}$，所以$f'(0)=\frac{1}{2}$.

（3）设函数$f(x)=ax-b\ln x(a>0)$有两个零点，则$\frac{b}{a}$的取值范围是

（A）$(e,+\infty)$　　（B）$(0,e)$　　（C）$\left(0,\frac{1}{e}\right)$　　（D）$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$

【答案】选（A）.

【解析】由题可得$x>0$，令$f'(x)=a-\frac{b}{x}=0$，可得$x=\frac{b}{a}$，$f''(x)=\frac{b}{x^2}$，

若$b<0$，则$f'(x)>0$，则此时至多一个零点，故$b>0$，则$f''(x)>0$，于是在$x=\frac{b}{a}$处取得极小值$f\left(\frac{b}{a}\right)=a\cdot\frac{b}{a}-b\ln\frac{b}{a}=b-b\ln\frac{b}{a}$，又

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(ax-b\ln x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}(ax-b\ln x)=+\infty$，

故函数有两个零点只需满足$f\left(\frac{b}{a}\right)=b-b\ln\frac{b}{a}<0$即可，即$\frac{b}{a}-\frac{b}{a}\ln\frac{b}{a}<0$，解得$\frac{b}{a}>e$.

（4）设函数$f(x,y)$可微，$f(x+1,e^x)=x(x+1)^2,f(x,x^2)=2x^2\ln x$，则$\mathrm{d}f(1,1)=$

（A）$\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$　　（B）$\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$　　（C）$\mathrm{d}y$　　（D）$-\mathrm{d}y$

【答案】选（C）.

【解析】$\mathrm{d}f(x,y)=f_1'(x,y)\mathrm{d}x+f_2'(x,y)\mathrm{d}y$，

$f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$对x求导可得

$$f_1'(x+1,e^x)+e^x f_2'(x+1,e^x)=(x+1)^2+2x(x+1),$$

将$x=0$带入可得$f_1'(1,1)+f_2'(1,1)=1$　①

在$f(x,x^2)=2x^2\ln x$两边对x求导可得

$$f_1'(x,x^2)+2xf_2'(x,x^2)=4x\ln x+2x$$

将$x=1$带入可得$f_1'(1,1)+2f_2'(1,1)=2$　②

由①和②可得$f_1'(1,1)=0,f_2'(1,1)=1$，故选（C）.

（5）二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$的正惯性指数与负惯性指数依次为

（A）2, 0　　（B）1, 1　　（C）2, 1　　（D）1, 2

【答案】选（B）.

【解析 1】$f(x_1,x_2,x_3)=2x_2^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$，二次型矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{bmatrix}$，

由矩阵$\boldsymbol{A}$的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&\lambda-2&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda-3),$$

得$\boldsymbol{A}$特征值为$-1,3,0$，则正、负惯性指数分别为1, 1，故选（B）.

【解析 2】$f(x_1,x_2,x_3)=2x_2^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$

$$=2\left(\frac{1}{2}x_1+x_2+\frac{1}{2}x_3\right)^2-\frac{1}{2}x_1^2-\frac{1}{2}x_3^2+x_1x_3=2\left(\frac{1}{2}x_1+x_2+\frac{1}{2}x_3\right)^2-\frac{1}{2}(x_1-x_3)^2,$$

由以上标准形可得正、负惯性指数分别为1, 1，故选（B）.

（6）设$A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$为4阶正交矩阵，若矩阵$B=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\\ \boldsymbol{\alpha}_2^T\\ \boldsymbol{\alpha}_3^T\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，$k$表示任意常数，则线性方程组$B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$的通解$\boldsymbol{x}=$

（A）$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_1$

（B）$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_2$

（C）$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_3$

（D）$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+k\boldsymbol{\alpha}_4$

【答案】选（D）.

【解析】$A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$为4阶正交矩阵，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$为一组标准正交向量组，则$r(B)=3$，且$\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\\ \boldsymbol{\alpha}_2^T\\ \boldsymbol{\alpha}_3^T\end{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$，则$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的通解为$k\boldsymbol{\alpha}_4$，

又$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\\ \boldsymbol{\alpha}_2^T\\ \boldsymbol{\alpha}_3^T\end{bmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\boldsymbol{\beta}$，故线性方程组$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$的通解为$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+k\boldsymbol{\alpha}_4$，其中$k$为任意常数，故选（D）.

（7）已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&-5\end{bmatrix}$，若下三角可逆矩阵$\boldsymbol{P}$和上三角可逆矩阵$\boldsymbol{Q}$，使$\boldsymbol{PAQ}$为对角矩阵，则$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$可以分别取

（A）$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}$

（B）$\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

（C）$\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}$

（D）$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&3&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2&-3\\0&-1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$

【答案】选（C）.

【解析】$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\begin{bmatrix}1&0&-1&1&0&0\\2&-1&1&0&1&0\\-1&2&-5&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&1&0&0\\0&-1&3&-2&1&0\\0&2&-6&1&0&1\end{bmatrix}$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&-1&1&0&0\\0&1&-3&2&-1&0\\0&0&0&-3&2&1\end{bmatrix}=(\boldsymbol{B},\boldsymbol{P})，即\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda} \\ \boldsymbol{Q} \end{bmatrix}，则\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

（8）设A,B为随机事件，且$0 < P(B) < 1$，下列命题中不成立的是

（A）若$P(A|B) = P(A)$，则$P(A|\overline{B}) = P(A)$

（B）若$P(A|B) > P(A)$，则$P(\overline{A}|\overline{B}) > P(\overline{A})$

（C）若$P(A|B) > P(A|\overline{B})$，则$P(A|B) > P(A)$

（D）若$P(A|A\cup B) > P(\overline{A}|A\cup B)$，则$P(A) > P(B)$

【答案】选（D）.

【解析】$P(A|A\cup B) = \dfrac{P(A(A\cup B))}{P(A\cup B)} = \dfrac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(AB)}$，

$$P(\overline{A}|A\cup B) = \frac{P(\overline{A}(A\cup B))}{P(A\cup B)} = \frac{P(\overline{A}B)}{P(A\cup B)} = \frac{P(B)-P(AB)}{P(A)+P(B)-P(AB)},$$

由$P(A|A\cup B) > P(\overline{A}|A\cup B)$可得$P(A) > P(B)-P(AB)$，故选（D）.

【注】由$P(A|B) = P(A)$知A与B相互独立，所以$P(A|\overline{B}) = P(A)$，故（A）正确；若$P(A|B) > P(A)$，由对称性知$P(\overline{A}|\overline{B}) > P(\overline{A})$，故（B）正确；若$P(A|B) > P(A|\overline{B})$，则$\dfrac{P(AB)}{P(B)} > \dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$，所以$P(AB) > P(A)P(B)$，故（C）正确.

（9）设$(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots,(X_n,Y_n)$为来自总体$N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$的简单随机样本，令$\theta = \mu_1-\mu_2, \overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i, \overline{Y} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i, \hat{\theta} = \overline{X}-\overline{Y}$，则

（A）$E(\hat{\theta}) = \theta, D(\hat{\theta}) = \dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$

（B）$E(\hat{\theta}) = \theta, D(\hat{\theta}) = \dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

（C）$E(\hat{\theta}) \neq \theta, D(\hat{\theta}) = \dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$

（D） $E(\hat{\theta}) \neq \theta, D(\hat{\theta}) = \dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

【答案】选（B）.

【解析】由题意可得

$$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2), \overline{X} \sim N\left(\mu_1,\frac{\sigma_1^2}{n}\right), \overline{Y} \sim N\left(\mu_2,\frac{\sigma_2^2}{n}\right), cov(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2,$$

由于(X,Y)服从二维正态分布，所以$(\overline{X},\overline{Y})$也服从二维正态分布，则$\overline{X}-\overline{Y}$服从一维正态分布，于是$E(\hat{\theta})=E(\overline{X}-\overline{Y})=E(\overline{X})-E(\overline{Y})=\mu_1-\mu_2=\theta$，

$$cov(\overline{X},\overline{Y})=cov\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)=\frac{1}{n^2}cov\left(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)=\frac{n\rho\sigma_1\sigma_2}{n^2}=\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{n},$$

于是$D(\hat{\theta})=D(\overline{X}-\overline{Y})=D(\overline{X})+D(\overline{Y})-2cov(\overline{X},\overline{Y})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$，选（B）.

（10）设总体X的概率分布为$P\{X=1\}=\dfrac{1-\theta}{2}, P\{X=2\}=P\{X=3\}=\dfrac{1+\theta}{4}$，则利用来自总体的样本值$1,3,2,2,1,3,1,2$，可得$\theta$的最大似然估计值为

（A） $\dfrac{1}{4}$　　（B） $\dfrac{3}{8}$　　（C） $\dfrac{1}{2}$　　（D） $\dfrac{5}{2}$

【答案】选（A）

【解析】似然函数$L(\theta)=\left(\dfrac{1-\theta}{2}\right)^3\left(\dfrac{1+\theta}{4}\right)^5$，取对数

$$\ln L(\theta)=3\ln\left(\frac{1-\theta}{2}\right)+5\ln\left(\frac{1+\theta}{4}\right),$$

由$\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{-3}{1-\theta}+\dfrac{5}{1+\theta}=0$，得$\hat{\theta}=\dfrac{1}{4}$，故选（A）.

二、填空题（本题共 6 题，每小题 5 分，共 30 分）

（11）若$y=\cos e^{-\sqrt{x}}$，则$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=$______.

【答案】$\dfrac{1}{2e}\sin\dfrac{1}{e}$.

【解析】$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\sin e^{-\sqrt{x}}\left(e^{-\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{-2\sqrt{x}}\right)$，则$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=\dfrac{1}{2e}\sin\dfrac{1}{e}$.

（12）$\displaystyle\int_{\sqrt{5}}^{5}\frac{x}{\sqrt{|x^2-9|}}\mathrm{d}x=$______.

【答案】6.

【解析】$\int_{\sqrt{5}}^{5}\frac{x}{\sqrt{|x^2-9|}}\mathrm{d}x=\int_{\sqrt{5}}^{3}\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\mathrm{d}x+\int_{3}^{5}\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{2}\int_{\sqrt{5}}^{3}\frac{\mathrm{d}(9-x^2)}{\sqrt{9-x^2}}+\frac{1}{2}\int_{3}^{5}\frac{\mathrm{d}(x^2-9)}{\sqrt{x^2-9}}$$

$$=-\sqrt{9-x^2}\Big|_{\sqrt{5}}^{3}+\sqrt{x^2-9}\Big|_{3}^{5}=6.$$

（13）设平面区域D由曲线$y=\sqrt{x}\sin\pi x(0\le x\le 1)$与$x$轴围成，则$D$绕$x$轴旋转所成旋转体的体积为______.

【答案】$\frac{\pi}{4}$.

【解析】$V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x}\sin\pi x\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^1 x\sin^2\pi x\mathrm{d}x\xlongequal{\pi x=t}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}t\sin^2 t\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}$.

（14）差分方程$\triangle y_t=t$的通解为______.

【答案】$y=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t+C$，$C$为任意常数.

【解析】$\triangle y_t=y_{t+1}-y_t=t$，则$\triangle y_t=y_{t+1}-y_t=0$的通解为$\bar{y}=C$，令特解为$y^*=(at+b)t$，带入可得$a=\frac{1}{2},b=-\frac{1}{2}$，则特解为$\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t$，

故可得通解为$y=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t+C$，$C$为任意常数.

（15）多项式$f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$中$x^3$项的系数为______.

【答案】-5.

【解析】只找到函数中含有x^3项即可，结果为

$$-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}=-x^3-4x^3=-5x^3,$$

故x^3项的系数为-5.

（16）甲乙两个盒子中各装有 2 个红球和2 个白球，先从甲盒中任取一球，观察颜色后放入乙盒中，再从乙盒中任取一球，令X,Y分别表示从甲盒中和乙盒中取到的红球个数，则X与Y的相关系数______.

【答案】 $\frac{1}{5}$

【解析】 由题可得

$$(X,Y)\sim\begin{pmatrix}(0,0)&(0,1)&(1,0)&(1,1)\\ \frac{3}{10}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{3}{10}\end{pmatrix},\quad X\sim\begin{pmatrix}0&1\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix},Y\sim\begin{pmatrix}0&1\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad XY\sim\begin{pmatrix}0&1\\ \frac{7}{10}&\frac{3}{10}\end{pmatrix},$$

$EX=EY=\frac{1}{2},DX=DY=\frac{1}{4},E(XY)=\frac{3}{10}$，$cov(X,Y)=E(XY)-EXEY=\frac{1}{20}$，

则 $\rho_{XY}=\frac{1}{5}$.

三、解答题（本题共 6 小题，共 70 分）

（17）（本题满分 10 分）

已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left[a\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]$ 存在，求 a 的值.

【解析】 极限存在的充要条件是左右极限存在且相等.

$$\lim_{x\to 0^+}\left[a\arctan\frac{1}{x}+\left(1+|x|^{\frac{1}{x}}\right)\right]=\lim_{x\to 0^+}\left[a\arctan\frac{1}{x}+\left(1+x^{\frac{1}{x}}\right)\right]=\frac{\pi}{2}a+e,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left[a\arctan\frac{1}{x}+\left(1+|x|^{\frac{1}{x}}\right)\right]=\lim_{x\to 0^-}\left[a\arctan\frac{1}{x}+\left(1-x^{\frac{1}{x}}\right)\right]=-\frac{\pi}{2}a+e^{-1},$$

则 $\frac{\pi}{2}a+e=-\frac{\pi}{2}a+e^{-1}$，解得 $a=\frac{e^{-1}-e}{\pi}$.

（18）（本题满分 12 分）

求函数 $f(x,y)=2\ln|x|+\frac{(x-1)^2+y^2}{2x^2}$ 的极值.

【解析】 由 $\begin{cases}f_x'(x,y)=\frac{2x^2+x-1-y^2}{x^3}=0\\ f_y'(x,y)=\frac{y}{x^2}=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=-1\\ y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=0\end{cases}$，又

$$\begin{cases}f_{xx}''(x,y)=\frac{-2x^2-2x+3+3y^2}{x^4}\\ f_{xy}''=-\frac{2y}{x^3}\\ f_{yy}''=\frac{1}{x^2}\end{cases},$$

在驻点 $(-1,0)$ 处，$A=3,AC-B^2=3$，故 $f(x,y)$ 在 $(-1,0)$ 处取极小值 2；

在驻点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 处，$A=24,AC-B^2=96$，故 $f(x,y)$ 在 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 处取极小值 $\frac{1}{2}-2\ln 2$.

（19）（本题满分 12 分）

设有界区域D是圆$x^2+y^2=1$和直线$y=x$以及x轴在第一象限围成的部分，计算二重积分$\iint\limits_D e^{(x+y)^2}(x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

【解析】原式$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 e^{(r\cos\theta+r\sin\theta)^2}\cdot(r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta)\cdot r\mathrm{d}r$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 e^{r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2}\cdot r^2\mathrm{d}r^2$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 ue^{u(\cos\theta+\sin\theta)^2}\mathrm{d}u$$

其中

$$\begin{aligned}\int_0^1 ue^{u(\cos\theta+\sin\theta)^2}\mathrm{d}u&=\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^4}\int_0^1 u(\cos\theta+\sin\theta)^2 e^{u(\cos\theta+\sin\theta)^2}\mathrm{d}u(\cos\theta+\sin\theta)^2\\&=\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^4}\int_0^{(\cos\theta+\sin\theta)^2}te^t\mathrm{d}t\\&=\frac{e^{(\cos\theta+\sin\theta)^2}}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}-\frac{e^{(\cos\theta+\sin\theta)^2}-1}{(\cos\theta+\sin\theta)^4},\end{aligned}$$

则原式$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}e^{(\cos\theta+\sin\theta)^2}\mathrm{d}\theta-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta-\sin\theta}{(\cos\theta+\sin\theta)^3}[e^{(\cos\theta+\sin\theta)^2}-1]\mathrm{d}\theta$

$$\xlongequal{u=\cos\theta+\sin\theta}\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{u}e^{u^2}\mathrm{d}u-\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}}\frac{e^{u^2}-1}{u^3}\mathrm{d}u$$

其中$\int_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{u}e^{u^2}\mathrm{d}u=\int_1^{\sqrt{2}}u^{-2}\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}e^{u^2}\right)=\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{2}e+\int_1^{\sqrt{2}}\frac{e^{u^2}}{u^3}\mathrm{d}u$,

故原式$=\frac{1}{8}e^2-\frac{1}{4}e+\frac{1}{8}$.

（20）（本题满分 12 分）

设n为正整数，$y=y_n(x)$是微分方程$xy'-(n+1)y=0$满足条件$y_n(1)=\frac{1}{n(n+1)}$的解.

（Ⅰ）求$y_n(x)$；

（Ⅱ）求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n(x)$的收敛域及和函数.

【解析】（Ⅰ）由$y'-\frac{n+1}{x}y=0$，得$y=Ce^{\int\frac{n+1}{x}\mathrm{d}x}=Cx^{n+1}$，将$y_n(1)=\frac{1}{n(n+1)}$带入可得$C=\frac{1}{n(n+1)}$，故$y_n(x)=\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

（Ⅱ）$\sum_{n=1}^{\infty} y_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$，显然收敛半径为1，收敛区间为$(-1,1)$，

当$x=-1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$收敛；当$n=1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$收敛，故收敛域为

$[-1,1]$，

令$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = (1-x)\ln(1-x)+x, x\in(-1,1)$，

又因为$S(x)$在$[-1,1]$连续，所以$S(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} S(x) = 1$

所以$S(x) = \begin{cases} (1-x)\ln(1-x)+x, x\in[-1,1) \\ 1, x=1 \end{cases}$.

（21）（本题满分 12 分）

设矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & b \end{bmatrix}$仅有两个不同的特征值.若$\boldsymbol{A}$相似与对角矩阵，求$a,b$的值，并求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$为对角矩阵.

【解析】由$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 0 \\ -1 & -a & \lambda-b \end{vmatrix} = (\lambda-b)(\lambda-3)(\lambda-1)=0$，

当$b=3$时，即$\lambda=3$为二重特征值，此时$\boldsymbol{A}$可相似对角化需满足$\lambda=3$对应两个线性无关的特征向量，即$r(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$，$3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -a & 0 \end{bmatrix}$,$a=-1$，

此时，$\lambda_1=\lambda_2=3$对应的线性无关特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^T$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,0,1)^T$；

$\lambda_3=1$，$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，对应特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,1)^T$，

令$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$.

当$b=1$时，即$\lambda=1$为二重特征值，类似以上求法，可得

$\lambda_1=\lambda_2=1$所对应特征向量为$\boldsymbol{\beta}_1=(-1,1,0)^T$,$\boldsymbol{\beta}_2=(0,0,1)^T$，

$\lambda_3=3$所对应特征向量为$\boldsymbol{\beta}_3=(1,1,1)^T$，

令$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3),\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&3\end{bmatrix}$.

（22）（本题满分 12 分）

在区间$(0,2)$上随机取一点，将该区间分成两段，较短一段的长度记为X，较长一段的长度记为Y.令$Z=\dfrac{Y}{X}$.

（Ⅰ）求X的概率密度;

（Ⅱ）求Z的概率密度;

（Ⅲ）求$E\left(\dfrac{X}{Y}\right)$.

【解析】（Ⅰ）$X+Y=2,X<Y$，由题意可得，$X\sim U(0,1)$，则X的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}1,0<x<1\\0,\quad 其他\end{cases};$$

（Ⅱ）由题意可得$Y=2-X$，于是$Z=\dfrac{2-X}{X}$，先求Z的分布函数:

$$F_Z=P\{Z\le z\}=P\left\{\frac{2-X}{X}\le z\right\}=P\left\{\frac{2}{X}-1\le z\right\};$$

当$z<1$时，$F_Z(z)=0$;

当$z\ge 1$时，

$$F_Z(z)=P\left\{\frac{2}{X}-1\le z\right\}=1-P\left\{X<\frac{2}{z+1}\right\}=1-\int_0^{\frac{2}{z+1}}1\,dx=1-\frac{2}{z+1},$$

所以Z的概率密度为$f_Z(z)=(F_Z(z))'=\begin{cases}\dfrac{2}{(z+1)^2},z\ge 1\\0,\qquad 其他\end{cases}$.

（Ⅲ）$E\left(\dfrac{X}{Y}\right)=E\left(\dfrac{X}{2-X}\right)=\displaystyle\int_0^1\frac{x}{2-x}\cdot 1\,dx=2\ln 2-1$.