2022 年数学二试题

一、选择题（1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分）

（1）当$x\to 0$时，$\alpha(x),\beta(x)$是非零无穷小量，给出下列四个命题：

①若$\alpha(x)\sim\beta(x)$，则$\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$；

②若$\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$，则$\alpha(x)\sim\beta(x)$；

③若$\alpha(x)\sim\beta(x)$，则$\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$；

④若$\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$，则$\alpha(x)\sim\beta(x)$.

其中正确的序号是

（A）①②　　（B）①④　　（C）①③④　　（D）②③④

（2）$\int_0^2 \mathrm{d}y\int_y^2 \frac{y}{\sqrt{1+x^3}}\mathrm{d}x=$

（A）$\frac{\sqrt{2}}{6}$　　（B）$\frac{1}{3}$　　（C）$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　（D）$\frac{2}{3}$

（3）设函数$f(x)$在$x=x_0$处有 2 阶导数，则

（A）当$f(x)$在x_0的某邻域内单调增加时，$f'(x_0)>0$

（B）当$f'(x_0)>0$时，$f(x)$在x_0的某邻域内单调增加

（C）当$f(x)$在x_0的某邻域内是凹函数时，$f''(x_0)>0$

（D）当$f''(x_0)>0$时，$f(x)$在x_0的某邻域内是凹函数

（4）设函数$f(t)$连续，令$F(x,y)=\int_0^{x-y}(x-y-t)f(t)\mathrm{d}t$，则

（A）$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$　　（B）$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

（C）$\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$　　（D）$\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

（5）设p为常数，若反常积分$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}dx$收敛，则$p$的取值范围是

（A）$(-1,1)$ （B）$(-1,2)$ （C）$(-\infty,1)$ （D）$(-\infty,2)$

（6）设有数列$\{x_n\}$，其中x_n满足$-\frac{\pi}{2} \leqslant x_n \leqslant \frac{\pi}{2}$，则

（A）若$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在

（B）若$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在

（C）若$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$存在，但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不一定存在

（D）若$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$存在，但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不一定存在

（7）已知$I_1=\int_0^1 \frac{x}{2(1+\cos x)}dx, I_2=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}dx, I_3=\int_0^1 \frac{2x}{1+\sin x}dx$，则

（A）$I_1<I_2<I_3$ （B）$I_2<I_1<I_3$ （C）$I_1<I_3<I_2$ （D）$I_3<I_2<I_1$

（8）设$\boldsymbol{A}$为三阶矩阵，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{A}$的特征值为$1,-1,0$的充分必要条件是

（A）存在可逆矩阵$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda Q}$

（B）存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$

（C）存在可逆矩阵$\boldsymbol{Q}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{-1}$

（D）存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P\Lambda P}^T$

（9）设矩阵$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&a&a^2\\1&b&b^2\end{bmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}$，则线性方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的解的情况为

（A）无解 （B）有解 （C）有无穷多解或无解 （D）有唯一解或无解

（10）设$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}\lambda\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\\lambda\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\\lambda\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}1\\\lambda\\\lambda^2\end{bmatrix}$，若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$等价，

则λ的取值范围是

（A）$\{0,1\}$ （B）$\{\lambda|\lambda\in R,\lambda\neq 2\}$

（C）$\{\lambda|\lambda\in R$ 且 $\lambda\neq -1,\lambda\neq 2\}$ （D）$\{\lambda|\lambda\in R,\lambda\neq -1\}$

二、填空题（11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分）

（11）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x}=$________.

（12）已知函数$y=y(x)$是由方程$x^2+xy+y^3=3$所确定，则$y''(1)=$________.

（13）$\displaystyle\int_0^1\frac{2x+3}{x^2-x+1}dx=$________.

（14）微分方程$y'''-2y''+5y'=0$的通解为$y(x)=$________.

（15）已知曲线L的极坐标方程为$r=\sin 3\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{3}\right)$，则曲线$L$与极坐标所围成的面积为________.

（16）设A为 3 阶矩阵，交换A的第二行和第三行，再将第二列的-1 倍加到第一列，得到矩阵$\begin{bmatrix}-2&1&-1\\1&-1&0\\-1&0&0\end{bmatrix}$，则$A^{-1}$的迹$\operatorname{tr}\left(A^{-1}\right)=$________.

三、解答题（17～22 小题，共 70 分）

（17）（本题满分 10 分）

已知函数$f(x)$在$x=1$处可导，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(e^{x^2}\right)-3f\left(1+\sin^2 x\right)}{x^2}=2$，求$f'(1)$.

（18）（本题满分 12 分）

设$y(x)$是微分方程$2xy'-4y=2\ln x-1$满足$y(1)=\dfrac{1}{4}$的解，求曲线$y=y(x)\ (1\leqslant x\leqslant e)$的弧长.

（19）（本题满分 12 分）

已知平面区域$\left\{(x,y)|y-2\leqslant x\leqslant\sqrt{4-y^2},0\leqslant y\leqslant 2\right\}$，计算$I=\iint\limits_D\dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

（20）（本题满分 12 分）

已知可微函数$f(u,v)$满足$\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial u}-\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial v}=2(u-v)\mathrm{e}^{-(u+v)}$，且$f(u,0)=u^2\mathrm{e}^{-u}$.

（I）记$\mathrm{g}(x,y)=f(x,y-x)$，求$\dfrac{\partial \mathrm{g}}{\partial x}$；

（II）求$f(u,v)$的表达式和极值.

（21）（本题满分 12 分）

设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有二阶连续导数，证明：$f''(x)\geq 0$的充要条件为对不同实数a,b，有$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\leqslant \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

（22）（本题满分 12 分）

已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3$.

（I）求正交变换$\boldsymbol{x}=Q\boldsymbol{y}$化二次型为标准形；

（II）证明：$\min\limits_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\dfrac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}=2$.