2022 年数学三试题

一、选择题（1~10 小题，每小题 5 分，共 50 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项时最符合题目要求的.）

(1)当$x\to 0$时，$\alpha(x),\beta(x)$是非零无穷小量，给出下列四个命题：

①若$\alpha(x)\sim\beta(x)$，则$\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$；

②若$\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$，则$\alpha(x)\sim\beta(x)$；

③若$\alpha(x)\sim\beta(x)$，则$\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$；

④若$\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$，则$\alpha(x)\sim\beta(x)$.

其中正确的序号是

(A)①② (B)①④ (C)①③④ (D)②③④

(2)已知$a_n=\sqrt[n]{n}-\dfrac{(-1)^n}{n}(n=1,2,\cdots)$，则$\{a_n\}$

(A)有最大值，有最小值 (B)有最大值，没有最小值
(C)没有最大值，有最小值 (D)没有最大值，没有最小值

(3)设函数$f(t)$连续，令$F(x,y)=\int_0^{x-y}(x-y-t)f(t)\mathrm{d}t$，则

(A)$\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ (B)$\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

(C)$\dfrac{\partial F}{\partial x}=-\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ (D)$\dfrac{\partial F}{\partial x}=-\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

(4)已知$I_1=\int_0^1\dfrac{x}{2(1+\cos x)}\mathrm{d}x,I_2=\int_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x,I_3=\int_0^1\dfrac{2x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$，则

(A)$I_1<I_2<I_3$ (B)$I_2<I_1<I_3$ (C)$I_1<I_3<I_2$ (D)$I_3<I_2<I_1$

(5)设$\boldsymbol{A}$为三阶矩阵，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{A}$的特征值为$1,-1,0$的充分必要条件是

(A)存在可逆矩阵$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda Q}$ (B)存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$

(C)存在正交矩阵$\boldsymbol{Q}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{-1}$ (D)存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{T}$

(6)设矩阵$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&a&a^2\\1&b&b^2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}$，则线性方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的解的情况为

(A)无解　　(B)有解　　(C)有无穷多解或无解　　(D)有唯一解或无解

(7)设$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}\lambda\\1\\1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\\lambda\\1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\\lambda\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}1\\\lambda\\\lambda^2\end{bmatrix}$,若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$等价，则$\lambda$的取值范围是

(A)$\{0,1\}$　　(B)$\{\lambda|\lambda\in R,\lambda\neq-2\}$

(C)$\{\lambda|\lambda\in R$且$\lambda\neq-1,\lambda\neq-2\}$　　(D)$\{\lambda|\lambda\in R,\lambda\neq-1\}$

(8)设随机变量$X\sim N(0,4)$,$Y\sim B\left(3,\frac{1}{3}\right)$，且$X$与$Y$不相关，则$D(X-3Y+1)=$

(A)2　　(B)4　　(C)6　　(D)10

(9)设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$独立同分布，且X_1的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}1-|x|,|x|<1\\0,\qquad\text{其他}\end{cases},$$

则当$n\to\infty$时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$依概率收敛于

(A)$\frac{1}{8}$　　(B)$\frac{1}{6}$　　(C)$\frac{1}{3}$　　(D)$\frac{1}{2}$

(10)设二维随机变量(X,Y)的概率分布为

X \ Y	0	1	2
−1	0.1	0.1	b
1	a	0.1	0.1

若事件$\{\max(X,Y)=2\}$与事件$\{\min(X,Y)=1\}$相互独立，则$\mathrm{Cov}(X,Y)=$

(A)-0.6　　(B)-0.36　　(C)0　　(D)0.48

二、填空题（11~16 小题，每小题 5 分，共 30 分）

(11)$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x}=$________.

(12) $\int_0^2 \frac{2x-4}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x=$________.

(13)已知函数$f(x)=\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x}$，则$f'''(2\pi)=$________.

(14)已知函数$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$，则$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)f(y-x)\mathrm{d}y=$________.

(15)设A为 3 阶矩阵，交换A的第二行和第三行，再将第二列的-1 倍加到第一列，得到矩阵$\begin{bmatrix}-2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$，则$A^{-1}$的迹$\mathrm{tr}\left(A^{-1}\right)=$________.

(16)设A,B,C为三个随机事件，A与B互不相容，A与C互不相容，B与C相互独立，且$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$，则$P(B\cup C|A\cup B\cup C)=$________.

三、**解答题**（17~22 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

(17)（本题满分 10 分）

设函数$y=y(x)$是微分方程$y'+\frac{1}{2\sqrt{x}}y=2+\sqrt{x}$满足$y(1)=3$的解，求曲线$y=y(x)$的渐近线.

(18)（本题满分 12 分）

设某产品的产量Q由资本投入量x和劳动投入量y决定，生产函数为$Q=12x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}$，该产品的销售单价$p$与$Q$的关系为$p=1160-1.5Q$，若单位资本投入和单位劳动投入的价格分别为6和8，求利润最大时的产量.

(19)（本题满分 12 分）

已知平面区域$\left\{(x,y)|y-2\leqslant x\leqslant\sqrt{4-y^2},0\leqslant y\leqslant 2\right\}$，计算$I=\iint\limits_D\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

(20)（本题满分 12 分）

求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n+1}{4^n(2n+1)}x^{2n}$的收敛域及和函数$S(x)$.

(21)（本题满分 12 分）

已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3$.

(I)求正交变换$\boldsymbol{x}=Q\boldsymbol{y}$化二次型为标准形；

(II)证明：$\min\limits_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\dfrac{f(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}=2$.

(22)（本题满分 12 分）

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自均值为θ的指数分布的简单随机样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$为来自均值为2θ的指数分布的简单随机样本，且两个样本相互独立，其中$\theta(\theta>0)$为未知参数.利用样本$X_1,X_2,\cdots,X_n,Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$求$\theta$的最大似然估计量$\hat{\theta}$，并求$D(\hat{\theta})$.