# 2023 年数学一试题解析

**一、选择题**（1~10 小题，每小题 5 分，共 50 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项时最符合题目要求的.）

(1)曲线$y=x\ln\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x-1}\right)$的斜渐近线为

(A)$y=x+\mathrm{e}$　　(B)$y=x+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

(C)$y=x$　　(D)$y=x-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

**【答案】**选(B).

**【解析】**由$a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x-1}\right)=1$，

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-ax)=\lim_{x\to\infty}\left[x\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x-1}\right)-x\right]=\lim_{x\to\infty}x\ln\left[1+\frac{1}{\mathrm{e}(x-1)}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\mathrm{e}(x-1)}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

故曲线的斜渐近线方程为$y=x+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

(2)若微分方程$y''+ay'+by=0$的解在$(-\infty,+\infty)$上有界，则

(A)$a<0,b>0$　　(B)$a>0,b>0$

(C)$a=0,b>0$　　(D)$a=0,b<0$

**【答案】**选(C).

**【解析】**微分方程的特征方程$\lambda^2+a\lambda+b=0$的两个特征根为$\lambda_{1,2}=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$.

若$a^2-4b>0$，则特征方程有两个不同的实根，此时方程的解$y=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2x}$在$(-\infty,+\infty)$上无界.

若$a^2-4b=0$，则$\lambda_1=\lambda_2=-\dfrac{a}{2}$，此时方程的解$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x}$在$(-\infty,+\infty)$上无界.

若 $a^2-4b<0$，则 $\lambda_{1,2}=\dfrac{-a\pm\sqrt{4b-a^2}\,\mathrm{i}}{2}$，此时方程的解为

$y=\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x}\left(C_1\cos\dfrac{\sqrt{4b-a^2}}{2}x+C_2\sin\dfrac{\sqrt{4b-a^2}}{2}x\right)$.如果此解在$(-\infty,+\infty)$上有界，则$a=0$，于是$b>0$.故答案选(C).

(3)设函数$y=f(x)$是由$\begin{cases}x=2t+|t|,\\ y=|t|\sin t.\end{cases}$确定，则

(A)$f(x)$连续，$f'(0)$不存在　　(B)$f'(0)$存在，$f'(x)$在$x=0$处不连续

(C)$f'(x)$连续，$f''(0)$不存在　　(D)$f''(0)$存在，$f''(x)$在$x=0$处不连续

**【答案】**选(C).

【解析】当$t\geqslant 0$时，$\begin{cases} x=3t \\ y=t\sin t \end{cases}$，得$y=\dfrac{x}{3}\sin\dfrac{x}{3}$；当$t<0$时，$\begin{cases} x=t \\ y=-t\sin t \end{cases}$，得$y=-x\sin x$；于是$y(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{3}\sin\dfrac{x}{3}, x\geq 0 \\ -x\sin x, x<0 \end{cases}$；根据导数定义可得$y'_+(0)=0, y'_-(0)=0$；

故$y'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{3}\sin\dfrac{x}{3}+\dfrac{x}{9}\cos\dfrac{x}{3}, x>0, \\ 0, \quad x=0, \\ -\sin x-x\cos x, \quad x<0, \end{cases}$ 知$y'(x)$是连续函数；又$y''_+(0)=\dfrac{2}{9}, y''_-(0)=-2$，

故$y''(0)$不存在.

(4)已知$a_n<b_n(n=1,2,\cdots)$，若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$都收敛，则“$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛”是“$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$绝对收敛”的

(A)充分必要条件　　(B)充分不必要条件

(C)必要不充分条件　　(D)既非充分也非必要条件

【答案】选(A).

【解析】由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$都收敛，知正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$收敛，也即绝对收敛.若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛，又$|b_n|=|b_n-a_n+a_n|\leqslant|b_n-a_n|+|a_n|$，知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$绝对收敛；若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$绝对收敛，由$|a_n|=|a_n-b_n+b_n|\leqslant|a_n-b_n|+|b_n|$，知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛.故答案选(A).

(5) 已知$n$阶矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$满足$\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{E}$是$n$阶单位矩阵，记矩阵$\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{BC} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$的秩分别为$r_1,r_2,r_3$，则

(A)$r_1\leqslant r_2\leqslant r_3$　　(B)$r_1\leqslant r_3\leqslant r_2$

(C)$r_3\leqslant r_1\leqslant r_2$　　(D)$r_2\leqslant r_1\leqslant r_3$

【答案】(B).

【解析】经初等变换不改变矩阵的秩.

$$r_1=r\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{BC} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}=r\begin{bmatrix} -\boldsymbol{ABC} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{BC} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}=r\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}=n,$$

$$r_2=r\begin{bmatrix} \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}=r\begin{bmatrix} \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}=r(\boldsymbol{AB})+n,$$

$$r_3=r\begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}=r\begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{ABAB} \end{bmatrix}=r\begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & -(\boldsymbol{AB})^2 \end{bmatrix}=r(\boldsymbol{AB})^2+n$$

$$\leqslant r(\boldsymbol{AB})+n.$$

故答案选(B).

(6)下列矩阵中不能相似于对角矩阵的是

(A)$\begin{bmatrix}1&1&a\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix}$ (B)$\begin{bmatrix}1&1&a\\1&2&0\\a&0&3\end{bmatrix}$

(C)$\begin{bmatrix}1&1&a\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ (D)$\begin{bmatrix}1&1&a\\0&2&2\\0&0&2\end{bmatrix}$

【答案】选(D).

【解析】选项(D)中矩阵$D$的特征值为$1,2,2$，由$r(2E-D)=r\begin{bmatrix}1&-1&-a\\0&0&-2\\0&0&0\end{bmatrix}=2$，知$3-r(2E-D)=1$，知二重特征值2只有一个线性无关的特征向量，故矩阵$D$不能相似于对角矩阵.

【注】选项(A)中 3 阶矩阵有三个互不相同的特征值为$1,2,3$，故矩阵可以相似对角化；选项(B)中的矩阵为实对称矩阵，故矩阵可以相似对角化；选项(C)中的矩阵$C$的特征值为$1,2,2$，由$3-r(2E-C)=2$，知矩阵与对角矩阵相似.

(7)已知向量$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}2\\5\\9\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$.若$\boldsymbol{\gamma}$可有$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示，也可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$线性表示，则$\boldsymbol{\gamma}=$

(A)$k\begin{bmatrix}3\\3\\4\end{bmatrix},k\in\mathbb{R}$ (B)$k\begin{bmatrix}3\\5\\10\end{bmatrix},k\in\mathbb{R}$ (C)$k\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix},k\in\mathbb{R}$ (D)$k\begin{bmatrix}1\\5\\8\end{bmatrix},k\in\mathbb{R}$

【答案】选(D).

【解析】议题设，$\boldsymbol{\gamma}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=-k_3\boldsymbol{\beta}_1-k_4\boldsymbol{\beta}_2$，于是

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_1+k_4\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0},$$

对其系数矩阵进行初等行变换，有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=\begin{bmatrix}1&2&2&1\\2&1&5&0\\3&1&9&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&2&1\\0&-3&1&-2\\0&0&1&1\end{bmatrix}.$$

令$k_4=k,k_3=-k$，则$\boldsymbol{\gamma}=k\boldsymbol{\beta}_1-k\boldsymbol{\beta}_2=k\begin{bmatrix}1\\5\\8\end{bmatrix},k\in\mathbb{R}$，故答案选(D).

(8)设随机变量$X$服从参数为1的泊松分布，则$E(|X-EX|)=$

(A)$\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ (B)$\dfrac{1}{2}$ (C)$\dfrac{2}{\mathrm{e}}$ (D)1

【答案】选(C).

【解析】由$X\sim P(1)$，知$EX=1$，于是

$$E(|X-EX|)=E(|X-1|)=\sum_{k=0}^{\infty}|k-1|\frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1}=\mathrm{e}^{-1}\left(1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k-1}{k!}\right)$$

$$=\mathrm{e}^{-1}\left(1+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}\right)\right)=\mathrm{e}^{-1}(1+1)=\frac{2}{\mathrm{e}}.$$

故答案选(C).

(9)设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体$N(\mu_1,\sigma^2)$的简单随机样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$为来自总体$N(\mu_2,2\sigma^2)$的简单随机样本，且两样本相互独立，记$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\bar{Y}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}Y_i$，

$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2,S_2^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2$，则

(A) $\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n,m)$　　(B) $\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1)$

(C) $\frac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F(n,m)$　　(D) $\frac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1)$

**【答案】**选(D).

**【解析】**因为$U=\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),V=\frac{(m-1)S_2^2}{2\sigma^2}\sim\chi^2(m-1)$，且$U$与$V$相互独立，于是$\frac{U/(n-1)}{V/(m-1)}=\frac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1)$，答案选(D).

(10)设$X_1,X_2$为来自总体$N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本，其中$\sigma(\sigma>0)$是未知参数.记$\hat{\sigma}=a|X_1-X_2|$，若$E(\hat{\sigma})=\sigma$，则$a=$

(A) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$　　(B) $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$　　(C) $\sqrt{\pi}$　　(D) $\sqrt{2\pi}$

**【答案】**选(A).

**【解析】**因为$Y=X_1-X_2\sim N(0,2\sigma^2)$，则

$$E(\hat{\sigma})=a\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|y|}{2\sqrt{\pi}\,\sigma}e^{-\frac{y^2}{4\sigma^2}}dy=2a\int_{0}^{+\infty}\frac{y}{2\sqrt{\pi}\,\sigma}e^{-\frac{y^2}{4\sigma^2}}dy=\frac{2a\sigma}{\sqrt{\pi}}=\sigma.$$

所以$a=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.故答案选(A).

## 二、填空题（11~16 小题，每小题 5 分，共 30 分）

(11)当$x\to0$时，函数$f(x)=ax+bx^2+\ln(1+x)$与$g(x)=e^{x^2}-\cos x$是等价无穷小，则$ab=$________.

**【答案】**$-2$.

**【解析】**当$x\to0$时，$g(x)=e^{x^2}-\cos x=e^{x^2}-1+1-\cos x\sim x^2+\frac{1}{2}x^2=\frac{3}{2}x^2$，于是$a=-1$，进而$f(x)=\ln(1+x)-x+bx^2\sim\left(b-\frac{1}{2}\right)x^2$，故$b-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，得$b=2$，故$ab=-2$.

(12)曲面$z=x+2y+\ln(1+x^2+y^2)$在点$(0,0,0)$处的切平面方程为________.

**【答案】**$x+2y-z=0$.

**【解析】**令$F(x,y,z)=x+2y+\ln(1+x^2+y^2)-z$，则

$$F'_x = 1 + \frac{2}{1+x^2+y^2}, F'_y = 2 + \frac{2y}{1+x^2+y^2}, F'_z = -1,$$

于是曲面在点$(0,0,0)$处切平面的法向量为$\boldsymbol{n}=\{F'_x,F'_y,F'_z\}\big|_{(0,0,0)}=\{1,2,-1\}$，故所求切平面方程为$x+2y-z=0$.

(13) 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，且 $f(x)=1-x, x\in[0,1]$，若 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=$________.

【答案】0.

【解析】当$n\geqslant 1$时，

$$a_n = 2\int_0^1 (1-x)\cos n\pi x\mathrm{d}x = -2\int_0^1 x\cos n\pi x\mathrm{d}x = -\frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\mathrm{d}\sin n\pi x$$
$$= -\frac{2}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \sin n\pi x\mathrm{d}x = -\frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Big|_0^1 = -\frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1].$$

于是$a_{2n}=0,(n=1,2,\cdots)$.故$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=0$.

(14) 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)-f(x)=x$, $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0$，则 $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=$________.

【答案】$\frac{1}{2}$.

【解析】$\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_2^3 f(x)\mathrm{d}x$，其中

$$\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x \overset{x=t+2}{=} \int_0^1 f(t+2)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(x+2)\mathrm{d}x = \int_0^1 [f(x)+x]\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2},$$

故 $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2} = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

(15)已知向量$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\-1\end{bmatrix}, \boldsymbol{\gamma}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，若 $\boldsymbol{\gamma}^T\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}_i,(i=1,2,3)$，则$k_1^2+k_2^2+k_3^2=$_______.

【答案】$\frac{11}{9}$.

【解析】议题设，有

$$\boldsymbol{\gamma}^T\boldsymbol{\alpha}_1 = k_1(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1)=3k_1=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}_1=1，得k_1=\frac{1}{3};$$

$$\boldsymbol{\gamma}^T\boldsymbol{\alpha}_2 = k_1(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)=3k_2=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}_2=-3，得k_2=-1;$$

$$\boldsymbol{\gamma}^T\boldsymbol{\alpha}_3 = k_1(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3)=3k_3=\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}_3=-1，得k_3=-\frac{1}{3}.$$

于是$k_1^2+k_2^2+k_3^2=\dfrac{11}{9}$.

(16) 设随机变量 $X,Y$ 相互独立，且 $X\sim B\left(1,\dfrac{1}{3}\right),Y\sim B\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$，则 $P\{X=Y\}=$ ________.

**【答案】** $\dfrac{1}{3}$.

**【解析】** $$\begin{aligned}P\{X=Y\}&=P\{X=Y=0\}+P\{X=Y=1\}\\&=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}\\&=P\{X=0\}P\{Y=0\}+P\{X=1\}P\{Y=1\}\\&=\frac{2}{3}C_2^0\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}C_2^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

**三、解答题**（17~22 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

(17)（本题满分 10 分）

设曲线$y=y(x)\ (x>0)$经过点$(1,2)$，该曲线上任一点$P(x,y)$到$y$轴的距离等于该点处的切线在$y$轴上的截距.

(I)求$y(x)$；

(II)求函数$f(x)=\displaystyle\int_1^x y(t)\mathrm{d}t$在$(0,+\infty)$上的最大值.

**【解析】**(I)设曲线$y=y(x)$在点$(x,y)$处的切线方程为$Y-y=y'(X-x)$，其在$y$轴上得截距为$y-xy'$，于是有$x=y-xy'$，即$y'-\dfrac{1}{x}y=-1$，解得$y(x)=x(C-\ln x)$.

由$y(1)=2$，得$C=2$，故$y(x)=x(2-\ln x)$.

(II) 由 (I) 知 $f(x)=\displaystyle\int_1^x t(2-\ln t)\mathrm{d}t\ (x>0)$，$f'(x)=x(2-\ln x)$．当 $0<x<\mathrm{e}^2$ 时，$f'(x)>0$；当$x>\mathrm{e}^2$时，$f'(x)<0$；于是$f(x)$在$x=\mathrm{e}^2$处取得最大值，且最大值为

$$f(\mathrm{e}^2)=\int_1^{\mathrm{e}^2}x(2-\ln x)\mathrm{d}x=x^2\Big|_1^{\mathrm{e}^2}-\frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}^2}\ln x\mathrm{d}x^2=\frac{1}{4}\mathrm{e}^4-\frac{5}{4}.$$

(18)（本题满分 12 分）

求函数$f(x,y)=(y-x^2)(y-x^3)$的极值.

**【解析】** 由$\begin{cases}f_x'=x(-2y-3xy+5x^3)=0,\\f_y'=2y-x^3-x^2=0,\end{cases}$得当$x=0$时，$y=0$；

当$x\neq0$时，有$\begin{cases}-2y-3xy+5x^3=0,\\2y-x^3-x^2=0,\end{cases}$于是得$3x^2-5x+2=0,x_1=\dfrac{2}{3},x_2=1$.

因此函数$f(x,y)$有 3 个驻点，分别为$(0,0),\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{10}{27}\right),(1,1)$.

$f_{xx}''=-2y-6xy+20x^3,f_{xy}''=-2x-3x^2,f_{yy}''=2$.

在驻点$(1,1)$处，$A=f_{xx}''(1,1)=12,B=f_{xy}''(1,1)=-5,C=f_{yy}''(1,1)=2$，由$B^2-AC=1>0$，知$(1,1)$不是$f(x,y)$的极值点.

在驻点$\left(\frac{2}{3},\frac{10}{27}\right)$处，同理算得$B^2-AC=-\frac{8}{27}<0,A=\frac{100}{27}>0$，知点$\left(\frac{2}{3},\frac{10}{27}\right)$是$f(x,y)$的极小值点，且极小值为$f\left(\frac{2}{3},\frac{10}{27}\right)=-\frac{4}{729}$.

在驻点$(0,0)$处，$B^2-AC=0$.取$y=0$，此时$f(x,y)=x^5$，显然$(0,0)$不是其极值点.

(19)（本题满分 12 分）

设空间有界区域$\Omega$由柱面$x^2+y^2=1$与平面$z=0$和$x+z=1$围成，$\Sigma$为$\Omega$边界的外侧，计算曲面积分

$$I=\oiint\limits_{\Sigma}2xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+xz\cos y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3yz\sin x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

**【解析】**根据高斯公式有

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(2z-xz\sin y+3y\sin x)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

由于$\Omega$关于$xOz$面对称，$-xz\sin y+3y\sin x$是$y$的奇函数，知

$$\iiint\limits_{\Omega}(-xz\sin y+3y\sin x)\mathrm{d}v=0\,.$$

故

$$\begin{aligned}I&=\iiint\limits_{\Omega}2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=3\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_0^{1-x}z\,\mathrm{d}z\\&=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant1}(1-x)^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r\cos\theta)^2r\,\mathrm{d}r\\&=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\cos\theta+\frac{1}{4}\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta=\frac{5}{4}\pi.\end{aligned}$$

(20)（本题满分 12 分）

设函数$f(x)$在$[-a,a]$上具有 2 阶连续导数，证明：

(I)若$f(0)=0$，则存在$\xi\in(-a,a)$，使得$f''(\xi)=\frac{1}{a^2}[f(a)+f(-a)]$；

(II)若$f(x)$在$(-a,a)$内取得极值，则存在$\eta\in(-a,a)$，使得

$$|f''(\eta)|\geqslant\frac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|.$$

**【解析】**(I)由泰勒公式得

$$f(a)=f(0)+f'(0)a+\frac{1}{2!}f''(\xi_1)a^2,\xi_1\in(0,a),$$

$$f(-a)=f(0)+f'(0)(-a)+\frac{1}{2!}f''(\xi_2)a^2,\xi_2\in(-a,0),$$

两式相加得$f(a)+f(-a)=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}a^2$.

又$f''(x)$在$[-a,a]$上连续，根据闭区间上连续函数的介值定理知，$\exists \xi\in[\xi_2,\xi_1]\subset(-a,a)$，

使得$f''(\xi)=\dfrac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}=\dfrac{1}{a^2}[f(a)+f(-a)]$.

(II)设$f(x)$在$x_0$处取得极值，则$f'(x_0)=0$.由泰勒公式得

$$f(a)=f(x_0)+f'(x_0)(a-x_0)+\frac{1}{2}f''(\eta_1)(a-x_0)^2,\eta_1\in(x_0,a),$$

$$f(-a)=f(x_0)+f'(x_0)(-a-x_0)+\frac{1}{2}f''(\eta_2)(-a-x_0)^2,\eta_2\in(-a,x_0).$$

两式相减得

$$|f(a)-f(-a)|=\left|\frac{1}{2}f''(\eta_1)(a-x_0)^2-\frac{1}{2}f''(\eta_2)(a+x_0)^2\right|.$$

记$|f''(\eta)|=\max\{|f''(\eta_1)|,|f''(\eta_2)|\}$，则

$$|f(a)-f(-a)|\leqslant\frac{|f''(\eta)|}{2}|(a-x_0)^2+(a+x_0)^2|\leqslant\frac{|f''(\eta)|}{2}\cdot 4a^2=2a^2|f''(\eta)|.$$

即存在$\eta\in(-a,a)$，使得$|f''(\eta)|\geqslant\dfrac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|$.

(21)（本题满分 12 分）

已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3$，$g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2+2y_2y_3$.

(I)求可逆变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$，将$f(x_1,x_2,x_3)$化为$g(y_1,y_2,y_3)$；

(II)是否存在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$将$f(x_1,x_2,x_3)$化为$g(y_1,y_2,y_3)$.

**【解析】**(I)设二次型$f$与$g$的矩阵分别为$A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&2&0\\-1&0&2\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$，则

$$f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax},g=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{By}.$$

利用配方法化二次型为标准型：

$f=x_1^2+2x_2^2+2x_3^3+2x_1x_2-2x_1x_3=(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2+x_3)^2$，

令$\begin{cases}z_1=x_1+x_2-x_3,\\z_2=\qquad x_2+x_3,\\z_3=\qquad\qquad x_3,\end{cases}$即$\begin{cases}x_1=z_1-z_2+2z_3,\\x_2=\qquad z_2-z_3,\\x_3=\qquad\qquad z_3,\end{cases}$，则化二次型为标准形$f=z_1^2+z_2^2$.

$g=y_1^2+y_2^2+y_3^2+2y_2y_3=y_1^2+(y_2+y_3)^2$，令$\begin{cases}z_1=y_1,\\z_2=\qquad y_2+y_3,\\z_3=\qquad\qquad y_3,\end{cases}$，化二次型为标准形

$g=z_1^2+z_2^2$.

于是$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$,

则令$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则经可逆变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}y$，二次型$f(x_1,x_2,x_3)$化为$g(y_1,y_2,y_3)$.

(II)不存在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，将$f(x_1,x_2,x_3)$化为$g(y_1,y_2,y_3)$.证明如下：

若存在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，使

$f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y})^T\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$，则$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，进而两矩阵的特征值相同.

由$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$，得矩阵$\boldsymbol{B}$的特征值为$0,1,2$.

而$|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}\neq 0$，则1不是矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值，这与假设矛盾.故不存在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$将$f(x_1,x_2,x_3)$化为$g(y_1,y_2,y_3)$.

(22)（本题满分 12 分）

设二维随机变量$(X,Y)$的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2}{\pi}(x^2+y^2), x^2+y^2\leqslant 1 \\ 0, \quad \text{其他} \end{cases}.$$

(I)求$X$与$Y$的协方差;

(II)$X$与$Y$是否相互独立?

(III)求$Z=X^2+Y^2$的概率密度.

**【解析】**(I)$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}x\cdot\dfrac{2}{\pi}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，同理

$EY=0$，$E(XY)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}xy\dfrac{2}{\pi}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，于是$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EXEY=0$.

(II)$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$.

当$x<-1$或$x>1$时，$f_X(x)=0$；

当$-1\leqslant x\leqslant 1$时，$f_X(x)=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\dfrac{2}{\pi}(x^2+y^2)\mathrm{d}y=\dfrac{4}{3\pi}(1+2x^2)\sqrt{1-x^2}$；

同理可得$f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{4}{3\pi}(1+2y^2)\sqrt{1-y^2}, -1\leqslant y\leqslant 1; \\ 0, \quad \text{其他.} \end{cases}$

显然$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，故$X$与$Y$不相互独立.

(III)设$Z$的分布函数为$F_Z(z)$，则$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X^2+Y^2\leqslant z\}$.

当$z<0$时，$F_Z(z)=0$；
当$z\geqslant 1$时，$F_Z(z)=1$；

当$0\leqslant z<1$时，$F_Z(z)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z}\dfrac{2}{\pi}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{z}}r^3\mathrm{d}r=z^2$；

故$Z$的概率密度为$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}2z, 0<z<1;\\ 0, \quad\quad 其他.\end{cases}$