2023 年数学二试题解析

一、选择题（1~10 小题，每小题 5 分，共 50 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项时最符合题目要求的.）

(1)曲线$y=x\ln\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x-1}\right)$的斜渐近线为

(A)$y=x+\mathrm{e}$　　(B)$y=x+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

(C)$y=x$　　(D)$y=x-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

【答案】选(B).

【解析】由$a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x-1}\right)=1$，

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-ax)=\lim_{x\to\infty}\left[x\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x-1}\right)-x\right]=\lim_{x\to\infty}x\ln\left[1+\frac{1}{\mathrm{e}(x-1)}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\mathrm{e}(x-1)}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

故曲线的斜渐近线方程为$y=x+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

(2)函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x\leqslant 0,\\ (x+1)\cos x, & x>0.\end{cases}$的一个原函数是

(A)$F(x)=\begin{cases}\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right), & x\leqslant 0\\ (x+1)\cos x-\sin x, & x>0\end{cases}$　　(B)$F(x)=\begin{cases}\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+1, & x\leqslant 0\\ (x+1)\cos x-\sin x, & x>0\end{cases}$

(C)$F(x)=\begin{cases}\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right), & x\leqslant 0\\ (x+1)\sin x+\cos x, & x>0\end{cases}$　　(D)$F(x)=\begin{cases}\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)+1, & x\leqslant 0\\ (x+1)\sin x+\cos x, & x>0\end{cases}$

【答案】选(D).

【解析】当$x\leqslant 0$时，$\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)+C_1$；当$x>0$时，

$\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\int(x+1)\cos x\mathrm{d}x=(x+1)\sin x+\cos x+C_2$；由原函数在$x=0$处连续，答案选(D).

(3)已知$\{x_n\},\{y_n\}$满足：$x_1=y_1=\dfrac{1}{2},x_{n+1}=\sin x_n,y_{n+1}=y_n^2(n=1,2,\cdots)$，则当$n\to\infty$时，

(A)x_n是y_n高阶无穷小　　(B) y_n是x_n高阶无穷小

(C) x_n与y_n是等价无穷小　　(D) x_n与y_n是同阶但不等价无穷小

【答案】选(B).

【解析】由递推关系可知$\{x_n\},\{y_n\}$均为单调递减数列，且均为无穷小量，又

$y_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2, y_3=\left(\frac{1}{2}\right)^{2^2}, \cdots, y_{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}=\left(\frac{1}{4}\right)^{2^{n-1}}$；

当$0<x<\frac{\pi}{2}$时，$\sin x>\frac{2}{\pi}x$，由$x_1=\frac{1}{2}, x_{n+1}=\sin x_n$可得，

$$x_{n+1}>\frac{2}{\pi}x_n>\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 x_{n-1}>\cdots>\left(\frac{2}{\pi}\right)^n x_1=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^n,$$

于是$0<\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}}<\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{2^{n-1}}}{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^n}\to 0, (n\to\infty)$，故当$n\to\infty$时，$y_n$是$x_n$高阶无穷小.

(4)若微分方程$y''+ay'+by=0$的解在$(-\infty,+\infty)$上有界，则

(A)$a<0,b>0$　　(B)$a>0,b>0$

(C)$a=0,b>0$　　(D)$a=0,b<0$

【答案】选(C).

【解析】微分方程的特征方程$\lambda^2+a\lambda+b=0$的两个特征根为$\lambda_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$.

若$a^2-4b>0$，则特征方程有两个不同的实根，此时方程的解$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$在$(-\infty,+\infty)$上无界.

若$a^2-4b=0$，则$\lambda_1=\lambda_2=-\frac{a}{2}$，此时方程的解$y=(C_1+C_2x)e^{-\frac{a}{2}x}$在$(-\infty,+\infty)$上无界.

若 $a^2-4b<0$ ，则 $\lambda_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{4b-a^2}\,i}{2}$ ，此时方程的解为$y=e^{-\frac{a}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}x\right)$.如果此解在$(-\infty,+\infty)$上有界,则$a=0$，于是$b>0$.故答案选(C).

(5) 设函数$y=f(x)$是由$\begin{cases}x=2t+|t|,\\ y=|t|\sin t.\end{cases}$确定，则

(A)$f(x)$连续，$f'(0)$不存在　　(B)$f'(0)$存在，$f'(x)$在$x=0$处不连续

(C)$f'(x)$连续，$f''(0)$不存在　　(D)$f''(0)$存在，$f''(x)$在$x=0$处不连续

【答案】选(C).

【解析】当$t\geq 0$时，$\begin{cases}x=3t\\ y=t\sin t\end{cases}$，得$y=\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}$；当$t<0$时，$\begin{cases}x=t\\ y=-t\sin t\end{cases}$，得$y=-x\sin x$；于是$y(x)=\begin{cases}\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}, x\geq 0\\ -x\sin x, x<0\end{cases}$；根据导数定义可得$y'_+(0)=0, y'_-(0)=0$；

故$y'(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}+\frac{x}{9}\cos\frac{x}{3}, x>0,\\ 0, \quad x=0,\\ -\sin x-x\cos x, \quad x<0,\end{cases}$知$y'(x)$是连续函数；又$y''_+(0)=\frac{2}{9}, y''_-(0)=-2$，

故$y''(0)$不存在.

(6)若函数$f(\alpha)=\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^{\alpha+1}}\mathrm{d}x$在$\alpha=\alpha_0$处取得最小值，则$\alpha_0=$

(A)$-\frac{1}{\ln(\ln 2)}$　　(B)$-\ln(\ln 2)$　　(C)$\frac{1}{\ln 2}$　　(D)$\ln 2$

【答案】选(A).

【解析】反常积分$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^{\alpha+1}}\mathrm{d}x$当且仅当$\alpha>0$时收敛，即$f(\alpha)$的定义域为$\alpha>0$.

当$\alpha>0$时，$f(\alpha)=\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^{\alpha+1}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{\alpha(\ln x)^{\alpha}}\Big|_2^{+\infty}=\frac{1}{\alpha(\ln 2)^{\alpha}}$.

记$g(\alpha)=\alpha(\ln 2)^{\alpha}$，则$g'(\alpha)=(\ln 2)^{\alpha}+\alpha(\ln 2)^{\alpha}\ln(\ln 2)$，当$0<\alpha<-\frac{1}{\ln(\ln 2)}$时，$g'(\alpha)>0$；当$\alpha>-\frac{1}{\ln(\ln 2)}$时，$g'(\alpha)<0$；所以$g(\alpha)$在$\alpha=-\frac{1}{\ln(\ln 2)}$处取得最大值，即$f(\alpha)$在$\alpha=-\frac{1}{\ln(\ln 2)}$处取得最小值.故答案选(A).

(7)设函数$f(x)=(x^2+a)\mathrm{e}^x$.若$f(x)$没有极值点，但曲线$y=f(x)$有拐点，则a得取值范围是

(A)$[0,1)$　　(B)$[1,+\infty)$　　(C)$[1,2)$　　(D)$[2,+\infty)$

【答案】选(C).

【解析】由$f(x)=(x^2+a)\mathrm{e}^x$，得

$$f'(x)=(x^2+2x+a)\mathrm{e}^x,$$

$$f''(x)=(x^2+4x+a+2)\mathrm{e}^x,$$

要使$f(x)$没有极值，则x^2+2x+a的判别式$\triangle=4-4a\leqslant 0,a\geqslant 1$；
要使$f(x)$有拐点，则$x^2+4x+a+2$的判别式$\triangle=16-4(a+2)>0,a<2$.
所以$a\in[1,2)$.

(8)设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为$n$阶可逆矩阵，$\boldsymbol{E}$是$n$阶单位矩阵，$\boldsymbol{M}^*$为$\boldsymbol{M}$的伴随矩阵，则$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}^*=$

(A)$\begin{bmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*&-\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*\\\boldsymbol{O}&|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*\end{bmatrix}$　　(B)$\begin{bmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*&-\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*\\\boldsymbol{O}&|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*\end{bmatrix}$

(C)$\begin{bmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*&-\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*\\\boldsymbol{O}&|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{bmatrix}$　　(D)$\begin{bmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*&-\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*\\\boldsymbol{O}&|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{bmatrix}$

【答案】选(D).

【解析】由$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}^*=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{vmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}^{-1}$，设$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1&\boldsymbol{X}_2\\\boldsymbol{X}_3&\boldsymbol{X}_4\end{bmatrix}$，则

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \boldsymbol{X}_2 \\ \boldsymbol{X}_3 & \boldsymbol{X}_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{A} & \boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{X}_3\boldsymbol{A} & \boldsymbol{X}_3+\boldsymbol{X}_4\boldsymbol{B} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix},$$

于是$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix}$.

于是$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}^{*}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}^{-1}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^{*} & -\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{B}^{*} \\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^{*} \end{bmatrix}$.

(9)二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_1+x_3)^2-4(x_2-x_3)^2$的规范形为

(A)$y_1^2+y_2^2$　　(B)$y_1^2-y_2^2$　　(C)$y_1^2+y_2^2-4y_3^2$　　(D)$y_1^2+y_2^2-y_3^2$

【答案】选(B).

【解析 1】令$z_1=x_1+x_2, z_2=x_1+x_3, z_3=x_3$，则

$$f(x_1,x_2,x_3)=z_1^2+z_2^2-4(z_1-z_2)^2=-3\left(z_1-\frac{4}{3}z_2\right)^2+\frac{7}{3}z_2^2,$$

知二次型的正负惯性指数均为 1，故答案选(B).

【解析 2】二次型矩阵为$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$.

由$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda+3 & -4 \\ -1 & -4 & \lambda+3 \end{vmatrix}=\lambda(\lambda+7)(\lambda-3)$，得$A$的特征值为$3,-7,0$，于是二次型的正惯性指数为1，负惯性指数为1，故答案选(B).

(10)已知向量$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.若$\boldsymbol{\gamma}$可有$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示，也可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$线性表示，则$\boldsymbol{\gamma}=$

(A)$k\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},k\in\mathbb{R}$　(B)$k\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix},k\in\mathbb{R}$　(C)$k\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},k\in\mathbb{R}$　(D)$k\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix},k\in\mathbb{R}$

【答案】选(D).

【解析】议题设，$\boldsymbol{\gamma}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=-k_3\boldsymbol{\beta}_1-k_4\boldsymbol{\beta}_2$，于是

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_1+k_4\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{0},$$

对其系数矩阵进行初等行变换，有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 9 & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

令$k_4=k, k_3=-k$，则$\boldsymbol{\gamma}=k\boldsymbol{\beta}_1-k\boldsymbol{\beta}_2=k\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix},k\in\mathbb{R}$，故答案选(D).

二、填空题（11~16 小题，每小题 5 分，共 30 分）

(11)当$x\to 0$时，函数$f(x)=ax+bx^2+\ln(1+x)$与$g(x)=e^{x^2}-\cos x$是等价无穷小，则$ab=$________.

【答案】-2.

【解析】当$x\to 0$时，$g(x)=e^{x^2}-\cos x=e^{x^2}-1+1-\cos x\sim x^2+\frac{1}{2}x^2=\frac{3}{2}x^2$，于是$a=-1$，进而$f(x)=\ln(1+x)-x+bx^2\sim\left(b-\frac{1}{2}\right)x^2$，故$b-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，得$b=2$，故$ab=-2$.

(12)曲线$\int_{-\sqrt{3}}^{x}\sqrt{3-t^2}\,dt$的弧长为________.

【答案】$\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi$.

【解析】由于$\int_{-\sqrt{3}}^{x}\sqrt{3-t^2}\,dt$的定义域为$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$，则所求弧长为

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx=2\int_{0}^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx\overset{x=2\sin t}{=}8\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 t\,dt$$

$$=4\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2t)\,dt=\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi.$$

(13)设函数$z=z(x,y)$由$e^z+xz=2x-y$确定，则$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,1)}=$________.

【答案】$-\frac{3}{2}$.

【解析】将$x=y=1$代入方程$e^z+xz=2x-y$中，得$z=0$.
在方程$e^z+xz=2x-y$两边对x求偏导，得

$$e^z\frac{\partial z}{\partial x}+z+x\frac{\partial z}{\partial x}=2. \qquad ①$$

将$x=y=1,z=0$代入①式，得$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=1$.

①式两端对x求偏导，得

$$e^z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+e^z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0. \qquad ②$$

将$x=y=1,z=0,\frac{\partial z}{\partial x}=1$代入②式，得$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,1)}=-\frac{3}{2}$.

(14)曲线$3x^3=y^5+2y^3$在$x=1$对应点处的法线斜率为________.

【答案】$-\frac{11}{9}$.

【解析】由$3x^3=y^5+2y^3$知$y(1)=1$.在等式$3x^3=y^5+2y^3$两端对x求导得

$$9x^2=5y^4y'+6y^2y'.$$

将$x=1,y=1$代入上式，得$y'(1)=\frac{9}{11}$.于是，曲线$3x^3=y^5+2y^3$在$x=1$对应点处的法线斜率为$-\frac{11}{9}$.

(15) 设连续函数$f(x)$满足$f(x+2)-f(x)=x,\int_0^2 f(x)\,dx=0$，则$\int_1^3 f(x)\,dx=$________.

【答案】$\frac{1}{2}$.

【解析】$\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x$，其中

$$\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x\overset{x=t+2}{=}\int_0^1 f(t+2)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(x+2)\mathrm{d}x=\int_0^1[f(x)+x]\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2},$$

故 $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

(16)已知线性方程组$\begin{cases}ax_1+x_3=1,\\x_1+ax_2+x_3=0,\\x_1+2x_2+ax_3=0,\\ax_1+bx_2=2\end{cases}$有解，其中$a,b$为常数.若$\begin{vmatrix}a&0&1\\1&a&1\\1&2&a\end{vmatrix}=4$，则

$\begin{vmatrix}1&a&1\\1&2&a\\a&b&0\end{vmatrix}=$________.

【答案】8.

【解析】方程组的增广矩阵为$\bar{A}=\begin{bmatrix}a&0&1&1\\1&a&1&0\\1&2&a&0\\a&b&0&2\end{bmatrix}$，依题设知系数矩阵与增广矩阵的秩均为 3，于是$|\bar{A}|=0$.将$|\bar{A}|$按照第 4 列展开得

$$|\bar{A}|=-\begin{vmatrix}1&a&1\\1&2&a\\a&b&0\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}a&0&1\\1&a&1\\1&2&a\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&a&1\\1&2&a\\a&b&0\end{vmatrix}+8=0,$$

于是$\begin{vmatrix}1&a&1\\1&2&a\\a&b&0\end{vmatrix}=8$.

三、解答题（17~22 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

(17)（本题满分 10 分）

设曲线$L:y=y(x)\ (x>\mathrm{e})$经过点$(\mathrm{e}^2,0)$，L上任一点$P(x,y)$到y轴的距离等于该点处的切线在y轴上的截距.

(I)求$y(x)$；

(II)在L上求一点，使该点处的切线与两坐标轴所围三角形的面积最小，并求此最小面积.

【解析】(I)设曲线$y=y(x)$在点(x,y)处的切线方程为$Y-y=y'(X-x)$，其在y轴上的截距为$y-xy'$，议题设有$x=y-xy'$，即$y'-\frac{1}{x}y=-1$，解得

$$y(x)=x(C-\ln x).$$

由$y(\mathrm{e}^2)=0$，得$C=2$，故$y(x)=x(2-\ln x)$.

(II)设曲线$y(x)=x(2-\ln x)$在(x,y)处的切线方程为$Y-y=y'(X-x)$，令$X=0$，得$Y=y-xy'=x$；令$Y=0$，得$X=\dfrac{x}{\ln x-1}$，该切线与两坐标轴所围三角形的面积为

$$S(x)=\frac{1}{2}XY=\frac{x^2}{2(\ln x-1)},$$

由$S'(x)=\dfrac{x(2\ln x-3)}{2(\ln x-1)^2}$，令$S'(x)=0$，得驻点$x=e^{\frac{3}{2}}$.当$e<x<e^{\frac{3}{2}}$时，$S'(x)<0$；当$x>e^{\frac{3}{2}}$时，$S'(x)>0$，故$S(x)$在$x=e^{\frac{3}{2}}$处取得最小值，且最小值为$S\left(e^{\frac{3}{2}}\right)=e^3$.故所求点为$\left(e^{\frac{3}{2}},\dfrac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}\right)$，所围三角形面积最小为$e^3$.

(18)（本题满分 12 分）

求函数$f(x,y)=xe^{\cos y}+\dfrac{x^2}{2}$的极值.

【解析】由$\begin{cases} f_x'=e^{\cos y}+x=0, \\ f_y'=-x\sin y\, e^{\cos y}=0 \end{cases}$得驻点为$(-e^{(-1)^k},k\pi)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

$A=f_{xx}''=1, B=f_{xy}''=-\sin y\, e^{\cos y}, C=f_{yy}''=-x(\cos y-\sin^2 y)e^{\cos y}$.

在驻点处，$B^2-AC=-e^{(-1)^k}\cdot(-1)^k e^{(-1)^k}$；当$k$为奇数时，$B^2-AC=e^{-2}>0$，不是极值点；当$k$为偶数时，$B^2-AC=-e^2<0$，且$A=1>0$，故此时函数取得极小值，且极小值为$f(-e,k\pi)=-\dfrac{e^2}{2}$.

(19)（本题满分 12 分）

已知平面区域$D=\left\{(x,y)\,|\,0\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}},x\geqslant1\right\}$.

(I)求D的面积；

(II)求D绕x轴旋转所成旋转体的体积.

【解析】(I) D的面积为

$$S=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 t}{\tan t\sec t}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin t}dt=\ln\left(\sqrt{2}+1\right).$$

(II)所求旋转体的体积为

$$V=\pi\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2(1+x^2)}dx=\pi\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\pi\left(-\frac{1}{x}-\arctan x\right)\Big|_1^{+\infty}$$
$$=\pi-\frac{\pi^2}{4}.$$

(20)（本题满分 12 分）

设平面有界区域D位于第一象限，由曲线$x^2+y^2-xy=1, x^2+y^2-xy=2$与直线$y=\sqrt{3}x, y=0$围成，计算$\displaystyle\iint_D\frac{1}{3x^2+y^2}dxdy$.

【解析】曲线$x^2+y^2-xy=1, x^2+y^2-xy=2$的极坐标方程分别为

$$r_1^2=\frac{1}{1-\cos\theta\sin\theta},r_2^2=\frac{2}{1-\cos\theta\sin\theta}.$$

$$\iint_D \frac{1}{3x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\sqrt{\frac{1}{1-\cos\theta\sin\theta}}}^{\sqrt{\frac{2}{1-\cos\theta\sin\theta}}}\frac{1}{r^2(3\cos^2\theta+\sin^2\theta)}r\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3\cos^2\theta+\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\ln 2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\mathrm{d}\tan\theta}{3+\tan^2\theta}$$

$$=\frac{\ln 2}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan\theta}{\sqrt{3}}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}\ln 2}{24}\pi.$$

(21)（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上具有 2 阶连续导数，证明：

(I)若 $f(0)=0$，则存在 $\xi\in(-a,a)$，使得 $f''(\xi)=\frac{1}{a^2}[f(a)+f(-a)]$；

(II)若 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 内取得极值，则存在 $\eta\in(-a,a)$，使得

$$|f''(\eta)|\geqslant\frac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|.$$

【解析】(I)由泰勒公式得

$$f(a)=f(0)+f'(0)a+\frac{1}{2!}f''(\xi_1)a^2,\xi_1\in(0,a),$$

$$f(-a)=f(0)+f'(0)(-a)+\frac{1}{2!}f''(\xi_2)a^2,\xi_2\in(-a,0),$$

两式相加得 $f(a)+f(-a)=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}a^2$.

又 $f''(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，根据闭区间上连续函数的介值定理知，$\exists\xi\in[\xi_2,\xi_1]\subset(-a,a)$，使得 $f''(\xi)=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}=\frac{1}{a^2}[f(a)+f(-a)]$.

(II)设 $f(x)$ 在 x_0 处取得极值，则 $f'(x_0)=0$.由泰勒公式得

$$f(a)=f(x_0)+f'(x_0)(a-x_0)+\frac{1}{2}f''(\eta_1)(a-x_0)^2,\eta_1\in(x_0,a),$$

$$f(-a)=f(x_0)+f'(x_0)(-a-x_0)+\frac{1}{2}f''(\eta_2)(-a-x_0)^2,\eta_2\in(-a,x_0).$$

两式相减得

$$|f(a)-f(-a)|=\left|\frac{1}{2}f''(\eta_1)(a-x_0)^2-\frac{1}{2}f''(\eta_2)(a+x_0)^2\right|.$$

记 $|f''(\eta)|=\max\{|f''(\eta_1)|,|f''(\eta_2)|\}$，则

$$|f(a)-f(-a)|\leqslant\frac{|f''(\eta)|}{2}|(a-x_0)^2+(a+x_0)^2|\leqslant\frac{|f''(\eta)|}{2}\cdot 4a^2=2a^2|f''(\eta)|.$$

即存在$\eta\in(-a,a)$，使得$|f''(\eta)|\geq \dfrac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|$.

(22)（本题满分 12 分）

设矩阵$\boldsymbol{A}$满足：对任意x_1,x_2,x_3，均有$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_2+x_3\\2x_1-x_2+x_3\\x_2-x_3\end{bmatrix}$.

(I)求$\boldsymbol{A}$；

(II)求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$与对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$，使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$.

【解析】(I)由于对任意x_1,x_2,x_3，有$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_2+x_3\\2x_1-x_2+x_3\\x_2-x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$成立，

所以$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\0&1&-1\end{bmatrix}$.

(II)由$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\-2&\lambda+1&-1\\0&-1&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda+2)$，得矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为

$\lambda_1=2,\lambda_2=-1,\lambda_3=-2$.

当$\lambda_1=2$时，解方程组$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特征向量为$\boldsymbol{\xi}_1=(4,3,1)^T$；

当$\lambda_2=-1$时，解方程组$(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特征向量为$\boldsymbol{\xi}_2=(-1,0,2)^T$；

当$\lambda_3=-2$时，解方程组$(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特征向量为$\boldsymbol{\xi}_3=(0,-1,1)^T$.

令$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{bmatrix}4&-1&0\\3&0&-1\\1&2&1\end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}2&&\\&-1&\\&&-2\end{bmatrix}$.