2023 年数学三试题解析

一、选择题（1~10 小题，每小题 5 分，共 50 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项时最符合题目要求的.）

(1)已知函数$f(x,y)=\ln(y+|x\sin y|)$，则

(A) $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$不存在，$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$存在 (B) $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$存在，$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$不存在

(C) $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$，$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$均存在 (D) $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$，$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$均不存在

【答案】选(A).

【解析】根据偏导数定义，

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x,1)-f(0,1)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+|x\sin1|)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{|x\sin1|}{x},$$

知$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$不存在；由

$$\lim_{y\to0}\frac{f(0,1+y)-f(0,1)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{\ln(1+y)}{y}=1,$$

知$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$存在.

(2)函数$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x\leqslant0,\\ (x+1)\cos x, & x>0.\end{cases}$的一个原函数是

(A)$F(x)=\begin{cases}\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right), & x\leqslant0\\ (x+1)\cos x-\sin x, & x>0\end{cases}$ (B)$F(x)=\begin{cases}\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+1, & x\leqslant0\\ (x+1)\cos x-\sin x, & x>0\end{cases}$

(C)$F(x)=\begin{cases}\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right), & x\leqslant0\\ (x+1)\sin x+\cos x, & x>0\end{cases}$ (D)$F(x)=\begin{cases}\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)+1, & x\leqslant0\\ (x+1)\sin x+\cos x, & x>0\end{cases}$

【答案】(D).

【解析】当$x\leqslant0$时，$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)+C_1$；当$x>0$时，$\int f(x)\mathrm{d}x=\int(x+1)\cos x\mathrm{d}x=(x+1)\sin x+\cos x+C_2$；由原函数在$x=0$处连续，答案选(D).

(3)若微分方程$y''+ay'+by=0$的解在$(-\infty,+\infty)$上有界，则

(A)$a<0,b>0$ (B)$a>0,b>0$ (C)$a=0,b>0$ (D)$a=0,b<0$

【答案】选(C).

【解析】微分方程的特征方程$\lambda^2+a\lambda+b=0$的两个特征根为$\lambda_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$.

若$a^2-4b>0$，则特征方程有两个不同的实根，此时方程的解$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$在

$(-\infty,+\infty)$上无界.

若$a^2-4b=0$，则$\lambda_1=\lambda_2=-\dfrac{a}{2}$，此时方程的解$y=(C_1+C_2x)e^{-\frac{a}{2}x}$在$(-\infty,+\infty)$上无界.

若 $a^2-4b<0$ ，则 $\lambda_{1,2}=\dfrac{-a\pm\sqrt{4b-a^2}\,\mathrm{i}}{2}$ ，此时方程的解为 $y=e^{-\frac{a}{2}x}\left(C_1\cos\dfrac{\sqrt{4b-a^2}}{2}x+C_2\sin\dfrac{\sqrt{4b-a^2}}{2}x\right)$.如果此解在$(-\infty,+\infty)$上有界，则$a=0$，于是$b>0$.故答案选(C).

(4)已知$a_n<b_n(n=1,2,\cdots)$，若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$都收敛，则“$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛”是“$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$绝对收敛”的

(A)充分必要条件　　(B)充分不必要条件

(C)必要不充分条件　　(D)既非充分也非必要条件

【答案】选(A).

【解析】由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$都收敛，知正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$收敛，亦即绝对收敛.若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛，又$|b_n|=|b_n-a_n+a_n|\leqslant|b_n-a_n|+|a_n|$，知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$绝对收敛；若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$绝对收敛，由$|a_n|=|a_n-b_n+b_n|\leqslant|a_n-b_n|+|b_n|$，知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛.故答案选(A).

(5)设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为$n$阶可逆矩阵，$\boldsymbol{E}$是$n$阶单位矩阵，$\boldsymbol{M}^*$为$\boldsymbol{M}$的伴随矩阵，则$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}^*=$

(A)$\begin{bmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*&-\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*\\\boldsymbol{O}&|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*\end{bmatrix}$　　(B)$\begin{bmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*&-\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*\\\boldsymbol{O}&|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{bmatrix}$

(C)$\begin{bmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*&-\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*\\\boldsymbol{O}&|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{bmatrix}$　　(D)$\begin{bmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*&-\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*\\\boldsymbol{O}&|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*\end{bmatrix}$

【答案】选(B).

【解析】由$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}^*=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{vmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}^{-1}$，设$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1&\boldsymbol{X}_2\\\boldsymbol{X}_3&\boldsymbol{X}_4\end{bmatrix}$，则

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1&\boldsymbol{X}_2\\\boldsymbol{X}_3&\boldsymbol{X}_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{A}&\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{X}_3\boldsymbol{A}&\boldsymbol{X}_3+\boldsymbol{X}_4\boldsymbol{B}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}\end{bmatrix},$$

于是$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix}$.

于是$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}^*=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{vmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{E}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}^{-1}=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^*&-\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*\\\boldsymbol{O}&|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\end{bmatrix}$.

(6)二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_1+x_3)^2-4(x_2-x_3)^2$的规范形为

(A)$y_1^2+y_2^2$　　(B)$y_1^2-y_2^2$　　(C)$y_1^2+y_2^2-4y_3^2$　　(D)$y_1^2+y_2^2-y_3^2$

【答案】选(B).

【解析】令（可逆线性变换）$z_1=x_1+x_2,z_2=x_1+x_3,z_3=x_3$，则

$$f(x_1,x_2,x_3)=z_1^2+z_2^2-4(z_1-z_2)^2=-3\left(z_1-\frac{4}{3}z_2\right)^2+\frac{7}{3}z_2^2,$$

知二次型的正负惯性指数均为 1，故答案选(B).

(7)已知向量$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}2\\5\\9\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$.若$\boldsymbol{\gamma}$可有$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示，也可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$线性表示，则$\boldsymbol{\gamma}=$

(A)$k\begin{bmatrix}3\\3\\4\end{bmatrix},k\in\mathbb{R}$　(B)$k\begin{bmatrix}3\\5\\10\end{bmatrix},k\in\mathbb{R}$　(C)$k\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix},k\in\mathbb{R}$　(D)$k\begin{bmatrix}1\\5\\8\end{bmatrix},k\in\mathbb{R}$

【答案】选(D).

【解析】议题设，$\boldsymbol{\gamma}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=-k_3\boldsymbol{\beta}_1-k_4\boldsymbol{\beta}_2$，于是

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_1+k_4\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0},$$

对其系数矩阵进行初等行变换，有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=\begin{bmatrix}1&2&2&1\\2&1&5&0\\3&1&9&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&2&1\\0&-3&1&-2\\0&0&1&1\end{bmatrix}.$$

令$k_4=k,k_3=-k$，则$\boldsymbol{\gamma}=k\boldsymbol{\beta}_1-k\boldsymbol{\beta}_2=k\begin{bmatrix}1\\5\\8\end{bmatrix},k\in\mathbb{R}$，故答案选(D).

(8)设随机变量X服从参数为1的泊松分布，则$E(|X-EX|)=$

(A)$\dfrac{1}{\mathrm{e}}$　　(B)$\dfrac{1}{2}$　　(C)$\dfrac{2}{\mathrm{e}}$　　(D)1

【答案】选(C).

【解析】由$X\sim P(1)$，知$EX=1$，于是

$$E(|X-EX|)=E(|X-1|)=\sum_{k=0}^{\infty}|k-1|\frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1}=\mathrm{e}^{-1}\left(1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k-1}{k!}\right)$$

$$=\mathrm{e}^{-1}\left(1+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}\right)\right)=\mathrm{e}^{-1}(1+1)=\frac{2}{\mathrm{e}}.$$

故答案选(C).

(9)设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体$N(\mu_1,\sigma^2)$的简单随机样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$为来自总体$N(\mu_2,2\sigma^2)$的简单随机样本，且两样本相互独立，记$\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\bar{Y}=\dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}Y_i$，

$S_1^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2,S_2^2=\dfrac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2$，则

(A) $\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n,m)$　　(B) $\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1)$

(C) $\dfrac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F(n,m)$　　(D) $\dfrac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1)$

【答案】选(D).

【解析】因为$U=\dfrac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),V=\dfrac{(m-1)S_2^2}{2\sigma^2}\sim\chi^2(m-1)$，且$U$与$V$相互独立，于是$\dfrac{U/(n-1)}{V/(m-1)}=\dfrac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1)$，答案选(D).

(10)设X_1,X_2为来自总体$N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本，其中$\sigma(\sigma>0)$是未知参数.记$\hat{\sigma}=a|X_1-X_2|$，若$E(\hat{\sigma})=\sigma$，则$a=$

(A) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}$　　(C) $\sqrt{\pi}$　　(D) $\sqrt{2\pi}$

【答案】选(A).

【解析】因为$Y=X_1-X_2\sim N(0,2\sigma^2)$，则

$$E(\hat{\sigma})=a\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|y|}{2\sqrt{\pi}\,\sigma}e^{-\frac{y^2}{4\sigma^2}}dy=2a\int_{0}^{+\infty}\frac{y}{2\sqrt{\pi}\,\sigma}e^{-\frac{y^2}{4\sigma^2}}dy=\frac{2a\sigma}{\sqrt{\pi}}=\sigma.$$

所以$a=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.故答案选(A).

二、填空题（11~16 小题，每小题 5 分，共 30 分）

(11) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(2-x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)=$________.

【答案】$\dfrac{2}{3}$.

【解析】令$x=\dfrac{1}{t}$，则

$$\text{原极限}=\lim_{t\to0}\frac{2-\frac{\sin t}{t}-\cos t}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{2t-\sin t-t\cos t}{t^3}=\lim_{t\to0}\frac{t-\sin t}{t^3}+\lim_{t\to0}\frac{t(1-\cos t)}{t^3}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{6}t^3}{t^3}+\lim_{t\to0}\frac{t\cdot\frac{1}{2}t^2}{t^3}=\frac{2}{3}.$$

(12)已知函数$f(x,y)$满足$df(x,y)=\dfrac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2},f(1,1)=\dfrac{\pi}{4}$，则$f\left(\sqrt{3},3\right)=$________.

【答案】$\dfrac{\pi}{3}$.

【解析】因为$df(x,y)=\dfrac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=d\left(\arctan\dfrac{y}{x}\right)$，所以$f(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}+C$.由$f(1,1)=\dfrac{\pi}{4}$，知$C=0$.故$f\left(\sqrt{3},3\right)=\dfrac{\pi}{3}$.

(13)$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}=$________.

【答案】$\dfrac{1}{2}(e^{-x}+e^{x})$.

【解析】注意到

$$e^{x}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\cdots,$$

于是$\dfrac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})=1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$，即$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}=\dfrac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$.

(14)设某公司在t时刻的资产为$f(t)$，从0时刻到t时刻的平均资产等于$\dfrac{f(t)}{t}-t$.假设$f(t)$连续，且$f(0)=0$，则$f(t)=$________.

【答案】$2e^{t}-2t-2$.

【解析】议题设，平均资产为$\dfrac{1}{t}\int_0^t f(x)dx=\dfrac{f(t)}{t}-t$，即$\int_0^t f(x)dx=f(t)-t^2$.等式两边对$t$求导得，$f(t)=f'(t)-2t$，解得$f(t)=Ce^{t}-2t-2$.由$f(0)=0$，得$C=2$.所以$f(t)=2e^{t}-2t-2$.

(15)已知线性方程组$\begin{cases}ax_1+x_3=1\\x_1+ax_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\ax_1+bx_2=2\end{cases}$有解，其中$a,b$为常数.若$\begin{vmatrix}a&0&1\\1&a&1\\1&2&a\end{vmatrix}=4$，则$\begin{vmatrix}1&a&1\\1&2&a\\a&b&0\end{vmatrix}=$________.

【答案】8.

【解析】方程组的增广矩阵为$\bar{A}=\begin{bmatrix}a&0&1&1\\1&a&1&0\\1&2&a&0\\a&b&0&2\end{bmatrix}$，依题设知系数矩阵与增广矩阵的秩均为3，于是$|\bar{A}|=0$.将$|\bar{A}|$按照第4列展开得

$$|\bar{A}|=-\begin{vmatrix}1&a&1\\1&2&a\\a&b&0\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}a&0&1\\1&a&1\\1&2&a\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&a&1\\1&2&a\\a&b&0\end{vmatrix}+8=0,$$

于是$\begin{vmatrix}1&a&1\\1&2&a\\a&b&0\end{vmatrix}=8$.

(16)设随机变量X与Y相互独立，且$X\sim B(1,p),Y\sim B(2,p),p\in(0,1)$，则$X+Y$与$X-Y$的相关系数为________.

【答案】$-\dfrac{1}{3}$.

【解析】$D(X+Y)=D(X-Y)=DX+DY=p(1-p)+2p(1-p)=3p(1-p)$，

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X+Y,X-Y)&=\mathrm{Cov}(X,X)-\mathrm{Cov}(X,Y)+\mathrm{Cov}(Y,X)-\mathrm{Cov}(Y,Y)\\&=DX-DY=p(1-p)-2p(1-p)=-p(1-p).\end{aligned}$$

于是$\rho_{X+Y,X-Y}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X+Y,X-Y)}{\sqrt{D(X+Y)}\sqrt{D(X-Y)}}=\dfrac{-p(1-p)}{3p(1-p)}=-\dfrac{1}{3}$.

三、**解答题**（17~22 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

(17)（本题满分 10 分）

设可导函数$y=y(x)$满足$a\mathrm{e}^x+y^2+y-\ln(1+x)\cos y+b=0$，且$y(0)=0,y'(0)=0$.

(I)求a,b的值；

(II)判断$x=0$是否为$y(x)$的极值点.

【解析】(I)方程两边对x求导得$a\mathrm{e}^x+2yy'+y'-\dfrac{\cos y}{1+x}+\ln(1+x)\sin y\cdot y'=0$，由

$y(0)=0,y'(0)=0$，得$a+b=0,a-1=0$，所以$a=1,b=-1$.

(II)由(I)可得$\mathrm{e}^x+2yy'+y'-\dfrac{\cos y}{1+x}+\ln(1+x)\sin y\cdot y'=0$，等式两边对$x$求导得

$$\mathrm{e}^x+2y'^2+2yy''+y''-\frac{-y'(1+x)\sin y-\cos y}{(1+x)^2}+\frac{y'\sin y}{1+x}+\ln(1+x)\left(y'^2\cos y+y''\sin y\right)=0$$

结合$y(0)=0,y'(0)=0$，可得$y''(0)=-2<0$，故$x=0$是$y(x)$的极大值点.

(18)（本题满分 12 分）

已知平面区域$D=\left\{(x,y)\,|\,0\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}},x\geqslant 1\right\}$.

(I)求D的面积；

(II)求D绕x轴旋转所成旋转体的体积.

【解析】(I) D的面积为

$$S=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 t}{\tan t\sec t}\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin t}\mathrm{d}t=\ln\left(\sqrt{2}+1\right).$$

(II)所求旋转体的体积为

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x=\pi\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\pi\left(-\frac{1}{x}-\arctan x\right)\Big|_1^{+\infty}\\&=\pi-\frac{\pi^2}{4}.\end{aligned}$$

(19)（本题满分 12 分）

已知平面区域$D=\{(x,y)|(x-1)^2+y^2\leqslant 1\}$，计算二重积分$\iint\limits_D \left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

【解析】设D_1是D在第一象限的区域，利用对称性及极坐标求得

$$\iint\limits_D \left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1}\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r)r\mathrm{d}r+2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_1^{2\cos\theta}(r-1)r\mathrm{d}r+2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}(1-r)r\mathrm{d}r$$

$$=3\sqrt{3}-\frac{\pi+32}{9}.$$

(20)（本题满分 12 分）

设函数$f(x)$在$[-a,a]$上具有 2 阶连续导数，证明：

(I)若$f(0)=0$，则存在$\xi\in(-a,a)$，使得$f''(\xi)=\frac{1}{a^2}[f(a)+f(-a)]$；

(II)若$f(x)$在$(-a,a)$内取得极值，则存在$\eta\in(-a,a)$，使得

$$|f''(\eta)|\geqslant\frac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|.$$

【解析】(I)由泰勒公式得

$$f(a)=f(0)+f'(0)a+\frac{1}{2!}f''(\xi_1)a^2,\xi_1\in(0,a),$$

$$f(-a)=f(0)+f'(0)(-a)+\frac{1}{2!}f''(\xi_2)a^2,\xi_2\in(-a,0),$$

两式相加得$f(a)+f(-a)=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}a^2$.

又$f''(x)$在$[-a,a]$上连续，根据闭区间上连续函数的介值定理知，$\exists\xi\in[\xi_2,\xi_1]\subset(-a,a)$，使得$f''(\xi)=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}=\frac{1}{a^2}[f(a)+f(-a)]$.

(II)设$f(x)$在x_0处取得极值，则$f'(x_0)=0$.由泰勒公式得

$$f(a)=f(x_0)+f'(x_0)(a-x_0)+\frac{1}{2}f''(\eta_1)(a-x_0)^2,\eta_1\in(x_0,a),$$

$$f(-a)=f(x_0)+f'(x_0)(-a-x_0)+\frac{1}{2}f''(\eta_2)(-a-x_0)^2,\eta_2\in(-a,x_0).$$

两式相减得

$$|f(a)-f(-a)|=\left|\frac{1}{2}f''(\eta_1)(a-x_0)^2-\frac{1}{2}f''(\eta_2)(a+x_0)^2\right|.$$

记$|f''(\eta)|=\max\{|f''(\eta_1)|,|f''(\eta_2)|\}$，则

$$|f(a)-f(-a)|\leqslant\frac{|f''(\eta)|}{2}|(a-x_0)^2+(a+x_0)^2|\leqslant\frac{|f''(\eta)|}{2}\cdot 4a^2=2a^2|f''(\eta)|.$$

即存在$\eta\in(-a,a)$，使得$|f''(\eta)|\geqslant \dfrac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|$.

(21)（本题满分 12 分）

设矩阵$\boldsymbol{A}$满足：对任意x_1,x_2,x_3，均有$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_2+x_3\\2x_1-x_2+x_3\\x_2-x_3\end{bmatrix}$.

(I)求$\boldsymbol{A}$；

(II)求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$与对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$，使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$.

【解析】(I)由于对任意x_1,x_2,x_3，有$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_2+x_3\\2x_1-x_2+x_3\\x_2-x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$成立，所以$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\0&1&-1\end{bmatrix}$.

(II)由$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\-2&\lambda+1&-1\\0&-1&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda+2)$，得矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=2,\lambda_2=-1,\lambda_3=-2$.

当$\lambda_1=2$时，解方程组$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特征向量为$\boldsymbol{\xi}_1=(4,3,1)^T$；

当$\lambda_2=-1$时，解方程组$(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特征向量为$\boldsymbol{\xi}_2=(-1,0,2)^T$；

当$\lambda_3=-2$时，解方程组$(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特征向量为$\boldsymbol{\xi}_3=(0,-1,1)^T$.

令$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{bmatrix}4&-1&0\\3&0&-1\\1&2&1\end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}2&&\\&-1&\\&&-2\end{bmatrix}$.

(22)（本题满分 12 分）

设随机变量X的概率密度为$f(x)=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2},-\infty<x<+\infty$，令$Y=e^X$.

(I)求X的分布函数;

(II)求Y的概率密度;

(III)Y的期望是否存在?

【解析】(I)X的分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{(1+e^t)^2}\mathrm{d}t=\frac{e^x}{1+e^x},-\infty<x<+\infty.$$

(II)$y=e^x$的反函数为$x=\ln y$.利用公式法得Y的概率密度为

$$g(y)=\begin{cases}f(\ln y)\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{(1+y)^2}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

(III)由于$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{y}{(1+y)^2}\mathrm{d}y$发散，故$Y$的数学期望不存在.